

О. Н. Петрищев¹, д.т.н., профессор,
К. В. Базило², к.т.н., доцент

¹Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»
просп. Победы, 37, Киев, 03056, Украина

²Черкасский государственный технологический университет
б-р Шевченко, 460, Черкасы, 18006, Украина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИМПЕДАНСА ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ДИСКА И ЕГО РАСЧЕТ В ОБЛАСТИ СРЕДНИХ И ВЫСОКИХ ЧАСТОТ

При достаточно общих начальных предположениях получено математическое описание электрического импеданса колеблющегося в вакууме пьезокерамического тонкого диска со сплошным электродированием торцевых поверхностей. Построено выражение для расчета электрического импеданса колеблющегося пьезокерамического диска в области средних частот, где вектор смещения материальных частиц диска практически полностью определяется радиальным компонентом. С помощью метода усреднения решена система дифференциальных уравнений в частных производных и на этом основании построена математическая модель электрического импеданса пьезокерамического диска в области высоких частот, где вектор смещения материальных частиц определяется радиальным и аксиальным компонентами.

Ключевые слова: тонкий диск, пьезокерамика, электрический импеданс, радиальный и аксиальный компоненты вектора смещения материальных частиц пьезокерамики.

Введение. Конечной целью математического моделирования физического состояния колеблющихся пьезокерамических элементов является качественное и количественное описание характеристик и параметров существующих в них электрических и упругих полей. Совершенно ясно, что получение содержательных и достоверных количественных оценок параметров физического состояния пьезоэлектрических (пьезокерамических) элементов не представляется возможным без достоверных данных о величинах физикомеханических констант материалов.

Таким образом, необходимо построить непротиворечивую методику экспериментального определения материальных констант пьезокерамики, которая доставляет достоверные значения минимум трех модулей упругости, двух элементов матрицы пьезомодулей и одного элемента матрицы диэлектрических проницаемостей, что и является **целью** работы.

Электрический импеданс пьезокерамического диска в области средних частот. Средними частотами будем называть частотный диапазон, в котором масштабная единица пространственной неоднородности напряженно-деформированного состояния (длина упругой волны) становится соизмеримой с радиусом пьезокерамического диска. Для тонких дисков, когда отношение $\alpha/R \ll 1$, из приве-

денной выше формулировки следует, что напряженно-деформированное состояние практически не изменяется по толщине диска. Из граничных условий (7) в работе [1] следует, что $\sigma_{\rho z} = \sigma_{zz} = 0 \forall (\rho, z) \in V$. Равенство $\sigma_{\rho z} = 0$ при $E_\rho = 0$ означает, что $\varepsilon_{\rho z} = \varepsilon_{z\rho} = 0 \forall (\rho, z) \in V$.

При сделанных предположениях обобщенный закон Гука (выражение (4) в работе [1]) доставляет следующие соотношения:

$$\sigma_{\rho\rho} = c_{11}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{31} E_z, \quad (1)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{11}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{31} E_z, \quad (2)$$

$$0 = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{33}^E \varepsilon_{zz} - e_{33} E_z. \quad (3)$$

Из соотношения (3) следует, что

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{c_{12}^E}{c_{33}^E} (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + \frac{e_{33}}{c_{33}^E} E_z. \quad (4)$$

Подстановка выражения (4) в формулы (1) и (2) приводит к следующим результатам:

$$\sigma_{\rho\rho} = c_{11}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} - e_{31}^* E_z, \quad (5)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{11}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} - e_{31}^* E_z, \quad (6)$$

где $c_{11} = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$; $c_{12} = c_{12}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$; $e_{31}^* = e_{31} - e_{33} / c_{33}^E$ – материальные константы для режима планарных колебаний, т. е. для режима деформирования, когда $\sigma_{zz} = 0$.

Компонент вектора электрической индукции $D_z = e_{31}(\varepsilon_{pp} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + e_{33}\varepsilon_{zz} + \chi_{33}^E E_z$ после исключения деформации ε_{zz} определяется следующим выражением:

$$D_z = \frac{e_{31}^*}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_p^{(z)}(\rho)] - \chi_{33}^* \frac{U_0}{\alpha}, \quad (7)$$

где $\chi_{33}^* = \chi_{33}^E (1 + \Delta\chi_{33}^*)$ – диэлектрическая проницаемость для режима планарных колебаний. Добавка $\Delta\chi_{33}^* = e_{33}^2 / (\chi_{33}^E c_{33}^E)$ при типичных для пьезокерамических ЦТС значениях материальных констант ($c_{11}^E = 110$ ГПа; $c_{12}^E = 60$ ГПа; $c_{33}^E = 100$ ГПа; $e_{33} = 18$ Кл/м²; $e_{31} = -8$ Кл/м² и $\chi_{33}^E = 1400\chi_0$; $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость вакуума или диэлектрическая постоянная) не превышает 0,262.

При определении компонента D_z выражением (7) формула для расчета электрического импеданса колеблющегося диска записывается в следующем виде:

$$Z_{эл}(\omega) = - \frac{U_0}{i\omega C_{\partial}^* \Xi^{(*)}(\omega)}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{pp}^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} [\sigma_{pp}^{(z)}(\rho) - \sigma_{\varphi\varphi}^{(z)}(\rho)] + \rho_0 \omega^2 u_p^{(z)}(\rho) = 0. \quad (10)$$

Нормальные напряжения $\sigma_{pp}^{(z)}(\rho)$ и $\sigma_{\varphi\varphi}^{(z)}(\rho)$ определяются из соотношений (5) и (6):

$$\sigma_{pp}^{(z)}(\rho) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \sigma_{pp}(\rho) dz = c_{11} \frac{\partial u_p^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12} \frac{u_p^{(z)}(\rho)}{\rho} - e_{31}^* E_z^{(z)}(\rho), \quad (11)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(z)}(\rho) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \sigma_{\varphi\varphi}(\rho) dz = c_{12} \frac{\partial u_p^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{11} \frac{u_p^{(z)}(\rho)}{\rho} - e_{31}^* E_z^{(z)}(\rho). \quad (12)$$

Так как

$$D_z(\rho) = \frac{e_{31}^*}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_p^{(z)}(\rho)] + \chi_{33}^* E_z^{(z)}(\rho), \quad (13)$$

то из сравнения двух физически эквивалентных определений (7) и (13) аксиального компонента вектора электрической индукции следует, что

$$E_z^{(z)}(\rho) = -U_0/\alpha. \quad (14)$$

Подставляя соотношения (11) и (12) в обыкновенное дифференциальное уравнение (10), получаем стандартное уравнение для функций Бесселя

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u_p^{(z)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u_p^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + [\lambda \rho^2 - 1] u_p^{(z)}(\rho) = 0,$$

решение которого, очевидно, имеет следующий вид:

где $C_{\partial}^* = \pi R^2 \chi_{33}^* / \alpha$ – динамическая электрическая емкость пьезокерамического диска для режима планарных колебаний, т. е. электрическая емкость в области средних частот. Функция $\Xi^{(*)}(\omega)$ рассчитывается по формуле

$$\Xi^{(*)}(\omega) = \frac{2e_{31}^* \alpha}{\chi_{33}^* R} u_p^{(z)}(R) - U_0. \quad (9)$$

Для определения усредненного по толщине диска радиального компонента вектора смещения материальных частиц диска на средних частотах подвергнем операции усреднения (см. выражение (22) в работе [1]) уравнение установившихся радиальных колебаний (см. выражение (5) в работе [1]). Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \frac{\partial \sigma_{pz}}{\partial z} dz = \frac{1}{\alpha} [\sigma_{pz}(\rho, \alpha) - \sigma_{pz}(\rho, 0)] = 0,$$

результат усреднения можно представить следующим выражением:

$$u_p^{(z)}(\rho) = A J_1(\lambda \rho), \quad (15)$$

где A – подлежащая определению константа; $J_1(\lambda \rho)$ – функция Бесселя первого порядка; $\lambda = \omega / \sqrt{c_{11}/\rho_0}$ – волновое число радиальных колебаний пьезокерамического диска.

Константа A определяется из граничного условия $\sigma_{pp}^{(z)}(R) = 0$ (условие $\sigma_{pz}(R) = 0$ выполняется автоматически) следующим образом:

$$A = - \frac{e_{31}^* U_0}{\alpha c_{11}} \frac{R}{[\lambda R J_0(\lambda R) - (1 - k) J_1(\lambda R)]},$$

где $J_0(\lambda R)$ – функция Бесселя нулевого порядка; $k = c_{12}/c_{11}$ – число, меньшее единицы.

Подставляя значение константы A в формулу (15), а полученный результат – в соотношение (9), получаем возможность записать выражение (8) в следующем виде:

$$Z_{\text{эл}}(\omega) = \frac{1}{i\omega C_{\text{д}}^*} F^{(*)}(\omega), \quad (16)$$

где

$$F^{(*)}(\omega) = \frac{\lambda R J_0(\lambda R) - (1-k) J_1(\lambda R)}{\lambda R J_0(\lambda R) - (1-k - 2K_{31}^2) J_1(\lambda R)}; \quad (17)$$

$K_{31}^2 = (e_{31}^*)^2 / (c_{11} \chi_{33}^*)$ – квадрат коэффициента электромеханической связи пьезокерамики в режиме радиальных колебаний диска, поляризованного по толщине.

Функция $F^{(*)}(\omega)$, заданная выражением (17), имеет ряд характерных точек на оси частот ω . На частоте ω_m , которая соответствует m -му по номеру корню уравнения

$$x J_0(x) - (1-k) J_1(x) = 0, \quad (18)$$

функция $F^{(*)}(\omega_m) = 0$. На частоте ω_m частота смены знака сил Кулона, которые деформируют пьезокерамический диск, совпадает с m -й по номеру собственной частотой радиальных осесимметричных колебаний круглого диска, и происходит резонансное потребление энергии источника упругих колебаний. Поскольку идеальный источник гармонически изменяющейся во времени разности электрических потенциалов обладает бесконечным запасом энергии, постольку на частотах радиальных электромеханических резонансов амплитудные значения радиального компонента $u_p^{(z)}(\rho)$ вектора смещения материальных частиц диска неограниченно возрастают. Сообразно этому возрастают амплитудные значения компонентов тензора деформаций и, как следствие, неограниченно возрастают амплитудные значения электрического заряда на поверхности $z = \alpha$. Последнее является причиной неограниченного роста амплитудных значений переменного тока в проводниках, которые подключены к электродированным поверхностям диска. Бесконечные токи на выходе идеального генератора электрического напряжения возникают в результате короткого замыкания, т. е. когда нагрузочное сопротивление $Z_{\text{эл}}(\omega_m) = 0$.

В табл. 1 приведены числовые значения первых двух корней (x_1 и x_2) корней уравнения (18) и их отношения $\xi_{21} = x_2/x_1$ в зави-

симости от значений параметра k . Необходимо подчеркнуть, что отношение ξ_{21} в точности равно отношению $\omega_{21} = \omega_{r2}/\omega_{r1}$, т. е. круговых частот второго и первого радиальных электромеханических резонансов, которое легко и точно определяется экспериментально. Необходимо обратить внимание еще и на то, что числовые значения корней уравнения (18) изменяются достаточно мало по сравнению с изменением параметра k . Это необходимо учитывать при выполнении измерений, которые следует выполнять со всей возможной тщательностью.

Таблица 1

Первые два корня уравнения

$$x J_0(x) - (1-k) J_1(x) = 0$$

k	x_1	x_2	ξ_{21}
0,00	1,841184	5,331443	2,895660
0,05	1,878980	5,341153	2,842582
0,10	1,915393	5,350843	2,793601
0,15	1,950511	5,360511	2,748259
0,20	1,984414	5,370155	2,706167
0,25	2,017172	5,379773	2,666988
0,30	2,048850	5,389364	2,630434
0,35	2,079508	5,398928	2,596253
0,40	2,109198	5,408462	2,564226
0,45	2,137971	5,417963	2,534162
0,50	2,165871	5,427433	2,505889
0,55	2,192942	5,436869	2,479259
0,60	2,219221	5,446270	2,454137
0,65	2,244744	5,455635	2,430404
0,70	2,269547	5,464962	2,407953
0,75	2,293658	5,474251	2,386690
0,80	2,317109	5,483500	2,366527
0,85	2,339926	5,492708	2,347385
0,90	2,362135	5,501874	2,329195
0,95	2,383761	5,510998	2,311892
1,00	2,404826	5,520078	2,295417

Вслед за частотами ω_m радиальных резонансов следуют частоты, на которых обращается в нуль знаменатель выражения (17). На этих частотах функция $F^{(*)}(\omega)$ неограниченно возрастает. Сообразно этому неограниченно возрастает электрический импеданс $Z_{\text{эл}}(\omega)$ пьезокерамического диска. Это происходит из-за того, что поляризационные заряды полностью компенсируют электрический заряд, который формирует на электродированных поверхностях диска генератор электрических сигналов. Результирующий заряд Q обращается в нуль, и электрический ток в проводниках исчезает. Это соответствует разомкнутой элек-

трической цепи или электрической цепи, в которую включено бесконечно большое сопротивление. При этом пьезокерамический диск, естественно, не потребляет энергии от источника колебаний, т. е. от генератора. Чтобы подчеркнуть специфику и отличие этого состояния от состояния на частотах электромеханического резонанса, частоты $\omega_{ам}$, на которых $Z_{эл}(\omega_{ам}) \rightarrow \infty$, называют частотами электромеханического антирезонанса.

В реальном эксперименте нули и бесконечности отсутствуют, поскольку в реальных упругих материалах всегда существуют потери на вязкое трение. Эти потери можно учесть с помощью параметра Q_m , который имеет смысл механической добротности материала. Как известно, добротностью называется безразмерное число, величина которого обратно пропорциональна потерям энергии в колебательной системе за период. В идеальных упругих телах, где потери энергии на вязкое трение отсутствуют, $Q_m \rightarrow \infty$. В реальных объектах добротность Q_m имеет конечное значение. При этом модули упругости $c_{\beta\lambda}^E(Q_m)$ записываются следующим образом [2]:

$$c_{\beta\lambda}^E(Q_m) = c_{\beta\lambda}^E (1 + i/Q_m), \quad (19)$$

где $c_{\beta\lambda}^E$ – статический модуль упругости; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

На рис. 1 показаны модули радиальных смещений $u_p^{(z)}(\rho)$ в пьезокерамическом диске радиусом $R = 33 \cdot 10^{-3}$ м и толщиной $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$ м. Параметры материала диска (пьезокерамики): $c_{11}^E = 110$ ГПа; $c_{12}^E = 60$ ГПа; $c_{33}^E = 100$ ГПа; $e_{33} = 18$ Кл/м²; $e_{31} = -8$ Кл/м² и $\chi_{33}^E = 1400\chi_0$; $Q_m = 100$; $k = c_{12}/c_{11} = 0,324$. Расчеты были выполнены на частотах первых трех электромеханических резонансов. Номер резонансной частоты проставлен в поле рисунка возле соответствующей кривой. Для указанного выше значения параметра k резонансным частотам соответствуют следующие значения корней уравнения (18): $x_1 = 2,063690$; $x_2 = 5,393958$ и $x_3 = 8,574693$. Разность электрических потенциалов $U_0 = 1$ В. По оси абсцисс на рис. 1 отложены значения безразмерной радиальной координаты ρ/R .

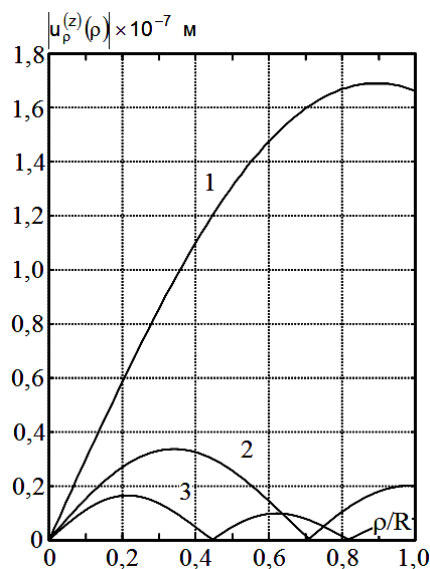


Рис. 1. Радиальные смещения материальных частиц пьезокерамического диска на частотах первых трех электромеханических резонансов

Обращает на себя внимание чрезвычайно быстрое уменьшения уровней радиальных смещений по мере роста номера электромеханического резонанса.

Этот факт дополнительно иллюстрируется рис. 2, где показано изменение модуля радиального смещения $u_p^{(z)}(R)$ боковой поверхности $\rho = R$ пьезокерамического диска в широком диапазоне частот. Вычисления проводились при указанном выше наборе геометрических и физико-механических параметров колеблющегося диска. Цифрами в поле рисунка указаны номера электромеханических резонансов. По оси абсцисс на рис. 2 отложено безразмерное волновое число $x = \lambda R$. Из представленных на рис. 2 результатов вычислений следует, что на частотах в окрестности первого толщинного резонанса (это примерно соответствует значениям $\lambda R \approx 40 \div 60$) радиальные смещения материальных частиц диска, рассчитанные в предположении, что $\sigma_{zz} = 0$, перестают существовать.

На рис. 3 показано изменение модуля электрического импеданса пьезокерамического диска в диапазоне средних частот (рис. 3, а). На врезке в поле рис. 3, а показано изменение значений модуля $Z_{эл}(\omega)$ в ближайшей окрестности частоты ω_{r1} первого электромеханического резонанса. На рис. 3, б показано изменение модуля электрического импеданса в окрестности частоты ω_{a1} первого электромеханического антирезонанса.

ханического антирезонанса. Геометрические и физико-механические параметры диска, которые использовались при вычислениях по формуле (16), указаны в комментариях к рис. 2.

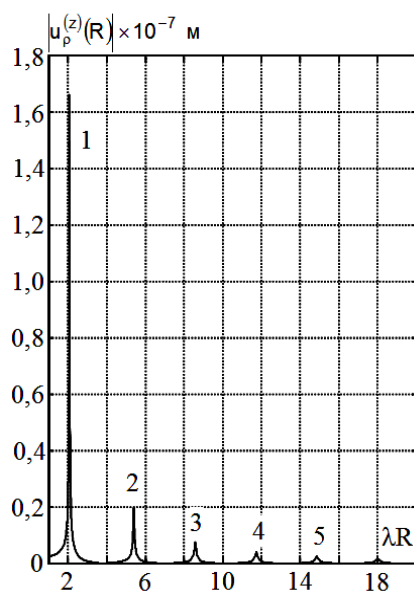


Рис. 2. Радиальные смещения боковой поверхности пьезокерамического диска в широком диапазоне частот

Как следует из формулы (19), выражения (16) и (17) являются функциями малого параметра $\varepsilon = 1/Q_m$. Раскладывая функцию $Z_{эл}(\omega)$ в степенной ряд по малому параметру ε и ограничивая разложение первой степенью этого параметра, получаем следующую оценку механической добротности пьезокерамики:

$$Q_m = \frac{R[(x_m^2 + k - 1)J_1(x_m) - kJ_0(x_m)]}{4x_m v C_\delta^*(0) K_{31}^2 J_1(x_m) Z_{эл}(x_m)}, \quad (20)$$

где x_m – m -й корень уравнения (18); $v = \sqrt{\text{Re} c_{11}/\rho_0}$ – скорость распространения радиальных колебаний в пьезокерамике, определенная без учета потерь на вязкое трение; $C_\delta^*(0)$ – динамическая электрическая емкость колеблющегося диска, определенная через диэлектрическую проницаемость $\text{Re} \chi_{33}^*$, в которой не учитываются потери на вязкое трение; $Z_{эл}(x_m)$ – электрический импеданс диска на частоте m -го электромеханического резонанса. Следует подчеркнуть, что $Z_{эл}(x_m)$ является действительной величиной. Из показанной на рис. 3, а врезки можно определить $Z_{эл}(x_1) = 7,8 \text{ Ом}$. Подстановка этой величины

в формулу (20) дает значение $Q_m = 100,096$. В расчет было заложено значение $Q_m = 100$, т. е. полученная оценка находится в хорошем согласии с истинным значением механической добротности.

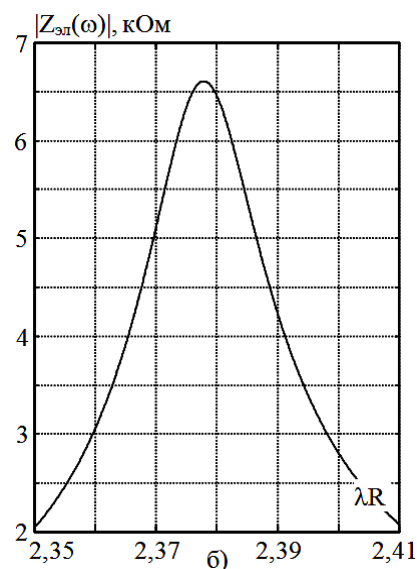
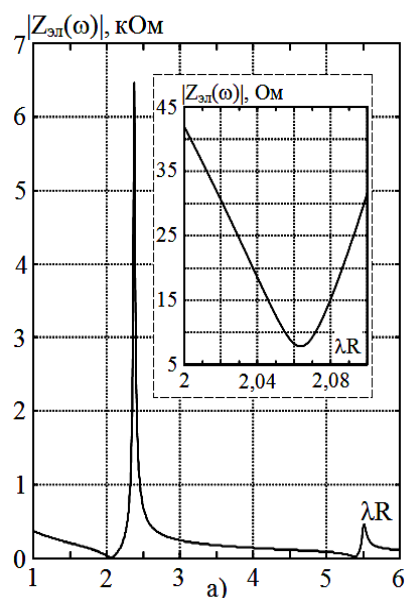


Рис. 3. Модуль электрического импеданса диска в области средних частот

В некоторых работах предпринимаются попытки определения механической добротности как отношения $\omega_{a1}/\Delta\omega_{0,707}$, где ω_{a1} – круговая частота первого электромеханического антирезонанса; $\Delta\omega_{0,707}$ – полоса частот на уровне -3 дБ от значения модуля $Z_{эл}(\omega_{a1})$, т. е. максимального значения электрического импеданса на частоте первого антирезонанса.

Выполняя эти расчеты с помощью графика, который показан на рис. 3, б, получаем значение $Q_m = 153,3$, которое существенно отличается от заложенной в расчет величины $Q_m = 100$. Причина такого положения вещей заключается в том, что электромеханический антирезонанс формируется за счет взаимодействия (взаимной компенсации) электрического заряда, который наводится на электродированной поверхности диска генератором разности электрических потенциалов, и поляризованного заряда, который образуется в результате деформирования пьезоэлектрика. Говоря иными словами, потери на вязкое трение не являются, в отличие от электромеханического резонанса, единственным фактором, который определяет величину электрического импеданса.

На рис. 4 показано частотно зависимое изменение модуля безразмерной функции $F^{(*)}(\omega)$, которая определена выражением (17). Расчет был выполнен для того же набора геометрических и физико-механических параметров, который использовался при вычислениях, результаты которых показаны на рис. 2 и рис. 3. На врезке в поле рис. 4 показано изменение модуля функции $F^{(*)}(\omega)$ в диапазоне безразмерных волновых чисел $3 \leq \lambda R \leq 5$ или, что то же самое, безразмерных частот $3 \leq \omega \tau_0 \leq 5$ ($\tau_0 = R/v$), где $|F^{(*)}(\omega)| \approx 1$. При значениях $\lambda^* R = \omega^* \tau_0 = 3,83$ модуль функции $F^{(*)}(\omega)$ равен единице и электрический импеданс $|Z_{эл}(\omega^*)| = 1/\omega^* |C_\phi^*|$. Зная значение $|Z_{эл}(\omega^*)|$, можно определить модуль динамической электрической емкости в режиме планарных колебаний пьезокерамического диска, и, как следствие, получить оценку модуля диэлектрической проницаемости χ_{33}^* . Поскольку во время выполнения измерений значение частоты ω^* , на которой $|F^{(*)}(\omega^*)| = 1$, а priori неизвестно, постольку ее значение, в первом приближении, можно оценить следующим образом: $\omega^* \equiv (\omega_r + \omega_a)/2$, где $\omega_r = (\omega_{r1} + \omega_{r2})/2$ и $\omega_a = (\omega_{a1} + \omega_{a2})/2$.

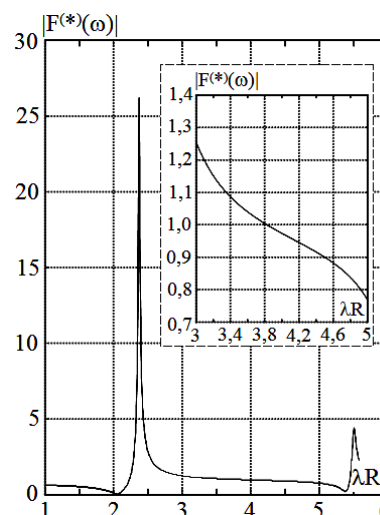


Рис. 4. Частотно зависимое изменение модуля функции $F^{(*)}(\omega)$

Электрический импеданс пьезокерамического диска в области высоких частот. В области высоких частот, когда длина упругой волны становится соизмеримой с толщиной диска, вектор смещения материальных частиц обладает и радиальным, и аксиальным компонентами. Электрический импеданс колеблющегося пьезокерамического диска определен в работе [1] формулой (29).

Усредненный по толщине диска радиальный компонент $u_r^{(z)}(\rho)$ вектора смещения материальных частиц диска должен удовлетворять уравнению (10). Усредненный по площади электродированной поверхности аксиальный компонент $u_z^{(p)}(z)$ должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \sigma_z^{(p)}(z)}{\partial z} + \rho_0 \omega^2 u_z^{(p)}(z) = 0, \quad (21)$$

которое получается из уравнения установившихся аксиальных колебаний (см. выражение (6) в работе [1]) после применения к нему процедуры усреднения (см. формулу (24) в работе [1]). Символом $\sigma_z^{(p)}(z)$ в соотношении (21) обозначено нормальное напряжение $\sigma_{zz}(\rho, z)$, усредненное по площади электродированной поверхности диска, т. е.

$$\sigma_z^{(p)}(z) = \frac{2}{R^2} \int_0^R \rho \sigma_{zz}(\rho, z) \rho d\rho. \quad (22)$$

Нормальные напряжения $\sigma_{\rho\rho}^{(z)}(\rho)$, $\sigma_{\phi\phi}^{(z)}(\rho)$ и $\sigma_z^{(p)}(z)$ получаются путем соответствующего усреднения следующих выражений:

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho, z) = c_{11}^E \frac{\partial u_\rho(\rho, z)}{\partial \rho} + c_{12}^E \frac{u_\rho(\rho, z)}{\rho} + c_{12}^E \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} - e_{31} E_z(\rho, z), \quad (23)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, z) = c_{12}^E \frac{\partial u_\rho(\rho, z)}{\partial \rho} + c_{11}^E \frac{u_\rho(\rho, z)}{\rho} + c_{12}^E \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} - e_{31} E_z(\rho, z), \quad (24)$$

$$\sigma_{zz}(\rho, z) = c_{12}^E \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_\rho(\rho, z)] + c_{33}^E \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} - e_{33} E_z(\rho, z). \quad (25)$$

Аксиальный компонент $D_z(\rho)$ вектора электрической индукции записывается следующим образом:

$$D_z(\rho) = e_{31} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_\rho(\rho, z)] + e_{33} \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} + \chi_{33}^E E_z(\rho, z). \quad (26)$$

Из условия $\partial D_z(\rho)/\partial z = 0$ следует физически эквивалентное выражению (26) представление компонента $D_z(\rho)$

$$D_z(\rho) = e_{31} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_\rho^{(z)}(\rho)] + \frac{e_{33}}{\alpha} [u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] - \chi_{33}^E \frac{U_0}{\alpha}. \quad (27)$$

Вычитая из выражения (26) соотношение (27), получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} & \frac{e_{31}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho [u_\rho(\rho, z) - u_\rho^{(z)}(\rho)] \right\} + e_{33} \left\{ \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} - \frac{1}{\alpha} [u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] \right\} + \\ & + \chi_{33}^E \left[E_z(\rho, z) + \frac{U_0}{\alpha} \right] = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Усредняя выражение (28) по толщине диска, получаем

$$E_z^{(z)}(\rho) = -U_0/\alpha. \quad (29)$$

Подвергая выражение (28) процедуре усреднения (22), приходим к выводу, что в

$$E_z^{(p)}(z) = -\frac{U_0}{\alpha} - \frac{e_{33}}{\chi_{33}^E} \left\{ \frac{\partial u_z^{(p)}(z)}{\partial z} - \frac{1}{\alpha} [u_z^{(p)}(\alpha) - u_z^{(p)}(0)] \right\}. \quad (30)$$

Усредняя выражения (23) и (24) по толщине диска, и принимая во внимание определение (29), получаем

$$\sigma_{\rho\rho}^{(z)}(\rho) = c_{11}^E \frac{\partial u_\rho^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^E \frac{u_\rho^{(z)}(\rho)}{\rho} + \frac{c_{12}^E}{\alpha} [u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] + \frac{e_{31}}{\alpha} U_0. \quad (31)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(z)}(\rho) = c_{12}^E \frac{\partial u_\rho^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{11}^E \frac{u_\rho^{(z)}(\rho)}{\rho} + \frac{c_{12}^E}{\alpha} [u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] + \frac{e_{31}}{\alpha} U_0. \quad (32)$$

Для тонкого диска справедлива оценка: $u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0) \cong u_z^{(p)}(\alpha) - u_z^{(p)}(0)$. С учетом этого факта подстановка соотношений (31) и

(32) в уравнение (10) приводит к следующему результату:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u_\rho^{(z)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u_\rho^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + \left[(\lambda^E R)^2 - 1 \right] u_\rho^{(z)}(\rho) = 0. \quad (33)$$

где $\lambda^E = \omega / \sqrt{c_{11}^E / \rho_0}$ – волновое число радиальных колебаний пьезокерамического диска в области высоких частот, когда $\sigma_{zz}(\rho, z) \neq 0$. Решение уравнения (33) очевидно:

$$u_\rho^{(z)}(\rho) = C J_1(\lambda^E \rho), \quad (34)$$

где C – подлежащая определению частотно-зависимая константа.

Подвергая операции усреднения (22) соотношение (25) и полагая при этом, что для тонкого диска справедлива оценка

$$\sigma_{zz}^{(p)}(z) \equiv \frac{2c_{12}^E}{R} u_p^{(z)}(R) + c_{33}^D \frac{\partial u_z^{(p)}(z)}{\partial z} - \frac{e_{33}^2}{\chi_{33}^E \alpha} [u_z^{(p)}(\alpha) - u_z^{(p)}(0)] + \frac{e_{33}}{\alpha} U_0, \quad (35)$$

где $c_{33}^D = c_{33}^E (1 + K_{33}^2)$; $K_{33}^2 = e_{33}^2 / (\chi_{33}^E c_{33}^E)$ – квадрат коэффициента электромеханической связи для режима толщинных колебаний поляризованной по толщине пьезокерамической пластинки.

Подставляя выражение (35) в уравнение (21), приводим его к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 u_z^{(p)}(z)}{\partial z^2} + \gamma^2 u_z^{(p)}(z) = 0, \quad (36)$$

$$\sigma_{pp}^{(z)}(R) \equiv \left[c_{11}^E \frac{\partial u_p^{(z)}(R)}{\partial \rho} + c_{12}^E \frac{u_p^{(z)}(R)}{\rho} \right]_{\rho=R}$$

$$\sigma_{zz}^{(p)}(z) \Big|_{z=\alpha;0} = 0, \quad (39)$$

где нормальное напряжение $\sigma_{zz}^{(p)}(z)$ определено соотношением (35).

Подстановка решений (34) и (37) в условия (38) и (39) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} Am_{11} + Bm_{12} + Cm_{13} &= -\frac{e_{31}U_0}{c_{12}^E} p_1; \\ Am_{21} + Bm_{22} + Cm_{23} &= -\frac{e_{31}U_0}{c_{12}^E} p_2; \\ Am_{31} + Bm_{32} + Cm_{33} &= -\frac{e_{31}U_0}{c_{12}^E} p_3, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} m_{11} &= -\frac{1 - \cos \gamma \alpha}{\gamma \alpha}; \quad m_{12} = \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha}; \\ m_{13} &= \xi_1 \left[J_0(\xi_3 \gamma \alpha) - \frac{1 - K^E}{\xi_3 \gamma \alpha} J_1(\xi_3 \gamma \alpha) \right]; \\ \xi_1 &= \frac{\sqrt{c_{11}^E c_{33}^D}}{c_{12}^E}; \quad \xi_3 = \frac{R}{\alpha} \sqrt{\frac{c_{33}^D}{c_{11}^E}}; \\ p_1 &= 1; \quad m_{21} = \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{(1 - \cos \gamma \alpha)}{\gamma \alpha} - \sin \gamma \alpha; \\ m_{22} &= -\frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} + \cos \gamma \alpha; \\ m_{23} &= \frac{2c_{12}^E \alpha}{c_{33}^D R} \frac{J_1(\xi_3 \gamma \alpha)}{\gamma \alpha}; \end{aligned}$$

$u_p(R, z) \equiv u_p^{(z)}(R)$, получаем следующий результат:

где $\gamma = \omega / \sqrt{c_{33}^D / \rho_0}$ – волновое число аксиальных (толщинных) колебаний пьезокерамического диска. Решение уравнения (36) очевидно:

$$u_z^{(p)}(z) = A \cos \gamma z + B \sin \gamma z, \quad (37)$$

где A и B – подлежащие определению частотно зависимые константы.

Константы A , B и C определяются из граничных условий

$$+ \frac{c_{12}^E}{\alpha} [u_z^{(p)}(\alpha) - u_z^{(p)}(0)] + \frac{e_{31}}{\alpha} U_0 = 0, \quad (38)$$

$$p_2 = \frac{e_{33} c_{12}^E}{e_{31} c_{33}^D}; \quad m_{31} = \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{(1 - \cos \gamma \alpha)}{\gamma \alpha};$$

$$m_{32} = -\frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} + 1;$$

$$m_{33} = m_{23}; \quad p_3 = p_2.$$

Решения системы уравнений (40) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{e_{31}U_0}{\gamma \alpha c_{12}^E} \frac{\Delta(A)}{\Delta_0}, \quad B = -\frac{e_{31}U_0}{\gamma \alpha c_{12}^E} \frac{\Delta(B)}{\Delta_0}, \\ C &= -\frac{e_{31}U_0}{\gamma \alpha c_{12}^E} \frac{\Delta(C)}{\Delta_0}, \end{aligned}$$

где $\Delta(A)$, $\Delta(B)$, $\Delta(C)$ и Δ_0 – определители следующих матриц:

$$\Delta(A) = \det \begin{vmatrix} p_1 & m_{12} & m_{13} \\ p_2 & m_{22} & m_{23} \\ p_3 & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta(B) = \det \begin{vmatrix} m_{11} & p_1 & m_{13} \\ m_{21} & p_2 & m_{23} \\ m_{31} & p_3 & m_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta(C) = \det \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & p_1 \\ m_{21} & m_{22} & p_2 \\ m_{31} & m_{32} & p_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_0 = \det \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}.$$

После определения констант A , B и C можно записать в явном виде усредненные смещения $u_p^{(z)}(R)$, $u_z^{(p)}(\alpha)$ и $u_z^{(p)}(0)$ и определить выражение для функции $\Xi^e(\omega)$ (см. соотношение (29) в работе [1]) в явном виде

$$\Xi^e(\omega) = \frac{U_0}{\Delta_0} F^e(\omega, \Pi),$$

$$F^e(\omega, \Pi) = \frac{2e_{31}^2 \alpha}{\chi_{33}^e c_{12}^E R} \Delta(C) \frac{J_1(\lambda^E R)}{\gamma \alpha} + \frac{e_{33} e_{31}}{\chi_{33}^e c_{12}^E} \left[-\Delta(A) \frac{(1 - \cos \gamma \alpha)}{\gamma \alpha} + \Delta(B) \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} \right] + 1.$$

При этом искомый электрический импеданс пьезокерамического диска в области высоких частот задается следующим выражением:

$$Z_{эл}(\omega) = \frac{U_0}{-i\omega C_\delta^e \Xi^e(\omega)} = \frac{\Delta_0}{i\omega C_\delta^e F^e(\omega, \Pi)}, \quad (41)$$

где $C_\delta^e = \pi R^2 \chi_{33}^e / \alpha$ – динамическая электрическая емкость пьезокерамического диска на высоких частотах.

На рис. 5 показаны результаты расчетов модуля электрического импеданса диска, которые выполнялись по формуле (41) при следующем фиксированном наборе параметров: $c_{11}^E = 110$ ГПа; $c_{12}^E = 60$ ГПа; $c_{33}^E = 100$ ГПа; $e_{33} = 18$ Кл/м²; $e_{31} = -8$ Кл/м² и $\chi_{33}^e = 1400 \chi_0$; $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая постоянная; механическая добротность пьезокерамики $Q_m = 100$; плотность пьезокерамики $\rho_0 = 7400$ кг/м³. Толщина диска $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$ м. Варьируемым параметром семейства кривых, показанных на рис. 5, является отношение R/α , которое задавалось равным 100; 50; 25; 12,5 и 6,25. Числовые значения отношения R/α проставлены в поле рисунка возле соответствующих кривых. По оси ординат на рис. 5 откладываются нормированные на величину модуля $Z_{эл}(\omega_a)$ на частоте ω_a толщинного антирезонанса значения модуля электрического импеданса $Z_{эл}(\omega)$. По оси абсцисс отсчитывается безразмерное волновое число $\gamma \alpha$. При оговоренных выше значениях параметров диска значению $\gamma \alpha = 1$ соответствует циклическая частота $f = v^D / (2\pi \alpha) = 219,1$ кГц, где

где $F^e(\omega, \Pi)$ – функция, зависящая от частоты и набора геометрических и физико-механических параметров (символ Π в списке аргументов функции) диска, числовые значения которой задаются формулой

$$v^D = \sqrt{c_{33}^D / \rho_0} = 4130 \text{ м/с} \quad \text{– скорость}$$

распространения плоских волн сжатия-растяжения вдоль направления электрической поляризации диска.

Из показанных на рис. 5 результатов следует, что при значительном изменении отношения R/α значение безразмерной частоты первого толщинного электромеханического антирезонанса остается практически неизменным. Сказанное подтверждают построения, приведенные на рис. 6, где показаны результаты вычисления отношения $|Z_{эл}(\omega)| / |Z_{эл}(\omega_a)|$ в ближайшей окрестности частоты антирезонанса. По оси абсцисс откладываются значения безразмерной частоты $\gamma \alpha$ в единицах числа π , т. е. величины $\gamma \alpha / \pi$. Отчетливо видно, что максимально возможное изменение безразмерной частоты электромеханического антирезонанса не превышает $0,02\pi$. Аналогичное заключение можно сделать о влиянии параметра R/α на значение безразмерной частоты первого толщинного электромеханического резонанса (рис. 5), где модуль $Z_{эл}(\omega)$ принимает минимальное значение.

На основании этих заключений можно сделать вывод, что радиальные смещения $u_p^{(z)}(R)$ материальных частиц диска практически не оказывают влияния на числовые значения частот первого толщинного электромеханического резонанса и антирезонанса. Говоря иными словами, числовые значения частот электромеханического резонанса и антирезонанса практически полностью определяются аксиальными смещениями $u_z^{(p)}(z)$.

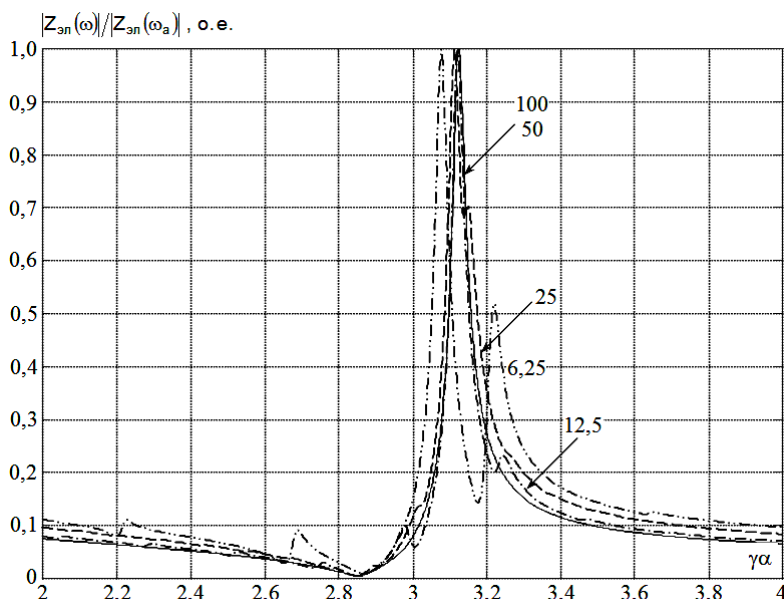


Рис. 5. Частотно зависимое изменение модуля электрического импеданса пьезокерамического диска в окрестности частоты первого толщинного электромеханического резонанса-антирезонанса

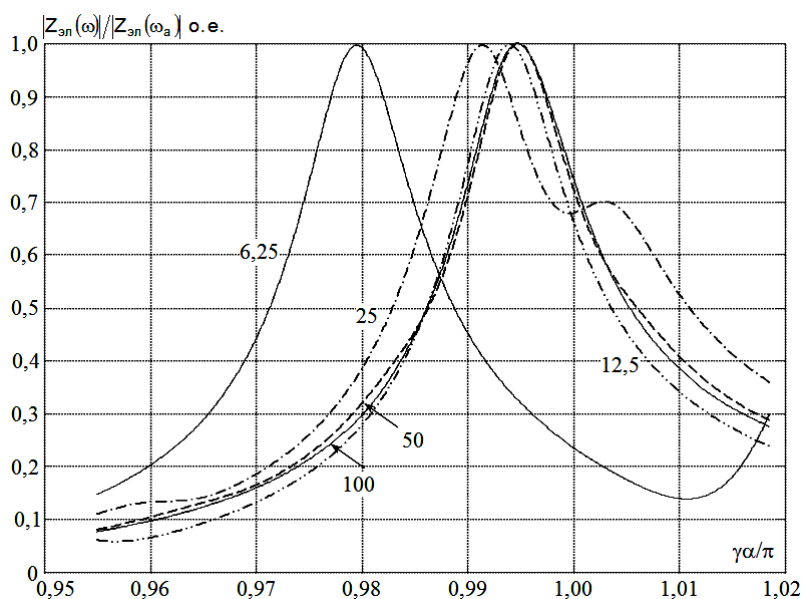


Рис. 6. Частотно зависимое изменение модуля электрического импеданса пьезокерамического диска в ближайшей окрестности частоты первого толщинного электромеханического антирезонанса

Принимая во внимание это обстоятельство, можно утверждать, что в области высоких частот функция $\Xi^e(\omega)$, определяющая электрический импеданс колеблющегося диска в этом частотном диапазоне, может быть записана в следующем виде:

$$\Xi^e(\omega) \cong \frac{e_{33}}{\chi_{33}^e} [u_z^{(p)}(\alpha) - u_z^{(p)}(0)] - U_0. \quad (42)$$

При выполнении расчета электрического импеданса по формуле (42), естественно,

будут утрачены некоторые детали частотно зависимого изменения функции $Z_{эл}(\omega)$. Зато будет сохранено главное – числовые значения частот электромеханического резонанса и антирезонанса.

Константы A и B , которые входят в описание аксиальных смещений $u_z^{(p)}(z)$ (см. выражение (37)), определяются из граничных условий (39), где нормальное напряжение $\sigma_{zz}^{(p)}(z)$ задается следующим выражением:

$$\sigma_z^{(p)}(z) = \gamma c_{33}^D \left\{ -A \left[\sin \gamma z + \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{(\cos \gamma \alpha - 1)}{\gamma \alpha} \right] + B \left[\cos \gamma z - \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} \right] + \frac{e_{33} U_0}{\gamma \alpha c_{33}^D} \right\}. \quad (43)$$

Подставляя в выражение (43) значения $z = \alpha$ и $z = 0$ и приравнявая полученные результаты нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений, из которых единственным образом определяются константы A и B :

$$A = \frac{e_{33} U_0}{c_{33}^D} \frac{\operatorname{tg}(\gamma \alpha / 2)}{\gamma \alpha F^e(\omega, \Pi)}, \quad B = -A \operatorname{tg}(\gamma \alpha / 2), \quad (44)$$

где

$$F^e(\omega, \Pi) = 1 - \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{\operatorname{tg}(\gamma \alpha / 2)}{(\gamma \alpha / 2)}. \quad (45)$$

Подстановка выражений (44) в определение (37) аксиальных смещений материальных частиц пьезокерамического диска позволяет определить величины $u_z^{(p)}(\alpha)$ и $u_z^{(p)}(0)$, после чего определяется в явном виде функция $\Xi^e(\omega)$, заданная соотношением (42). После этого выражение для расчета электрического импеданса $Z_{эл}(\omega)$ можно записать в следующем виде:

$$Z_{эл}(\omega) = \frac{1}{i \omega C_\theta^e} F^e(\omega, \Pi). \quad (46)$$

Из выражения (46) следует, что при стремлении $\gamma \alpha / 2$ слева к значению $\pi / 2$ функ-

ция $F^e(\omega, \Pi)$ сначала имеет положительные значения, затем обращается в нуль, что соответствует электромеханическому резонансу, а потом устремляется к минус бесконечности. В случае отсутствия потерь энергии на вязкое трение в материале пьезокерамического диска ($Q_m \rightarrow \infty$) при $\gamma \alpha = \pi$ электрический импеданс $Z_{эл}(\omega_a) \rightarrow \infty$.

На рис. 7, а показано изменение функции $F^e(\omega, \Pi)$ для случая $Q_m \rightarrow \infty$ и $K_{33}^2 = 0,262$, что соответствует набору физико-механических параметров, которые были использованы при расчетах кривых, которые показаны на рис. 5 и рис. 6. На рис. 7, б показан нормированный на свое максимальное значение модуль комплекснозначной функции $F^e(\omega, \Pi)$, когда механическая добротность материала диска $Q_m = 100$ и безразмерное волновое число $\gamma \alpha$ становится комплексным числом $\gamma \alpha(1 - i/(2Q_m))$. Сопоставляя между собой кривые, которые показаны на рис. 5 и рис. 7, б, можно заключить, что детализированный расчет электрического импеданса колеблющегося пьезокерамического диска следует осуществлять по формуле (41), а оценку числовых значений частот резонанса и антирезонанса выполнять с использованием функции $F^e(\omega, \Pi)$, которая задана выражением (45).

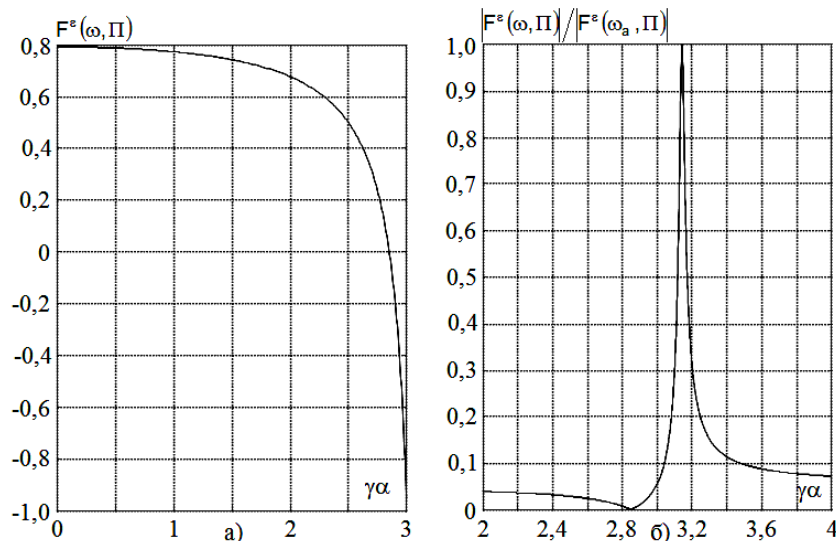


Рис. 7. Частотно зависимое изменение функции $F^e(\omega, \Pi)$ при отсутствии потерь энергии в материале диска (а) и для материала с механической добротностью $Q_m = 100$

Завершая исследование электрического импеданса пьезокерамического диска в области высоких частот, рассмотрим его значение на частоте первого электромеханического резонанса.

В формуле (46) от значения механической добротности Q_m зависят волновое число γ и квадрат коэффициента электромеханической связи K_{33}^2 . При этом $\gamma = \omega/v^D \cong \gamma^0(1 - i/(2Q_m))$ и $K_{33}^2 = e_{33}^2/[\chi_{33}^\varepsilon c_{33}^E(1 + i/Q_m)]$, где γ^0 – волновое число аксиальных колебаний диска, определенное без учета потерь энергии на вязкое трение. Очевидно, что параметр $\varepsilon = 1/(2Q_m) \ll 1$. Разлагая выражение (46) на частоте первого электромеханического резонанса в ряд по степеням малого параметра ε и ограничиваясь при этом нулевым и первым членами разложения, получаем

$$Z_{эл}(\omega_p) = \varepsilon \frac{K_{33}^2 \Psi(\omega_p)}{\omega_p C_\partial^\varepsilon (1 + K_{33}^2)}, \quad (47)$$

$$\text{где } K_{33}^2 = \frac{e_{33}^2}{\chi_{33}^\varepsilon c_{33}^E};$$

$$\Psi(\omega_p) = \frac{2 \operatorname{tg}(\gamma^0 \alpha / 2)}{(1 + K_{33}^2)(\gamma^0 \alpha / 2)} + \frac{1 + \sin(\gamma^0 \alpha)}{\cos^2(\gamma^0 \alpha / 2)}.$$

На рис. 8 приведены графики модуля электрического импеданса $Z_{эл}(\omega)$, рассчитанные по формуле (41) в ближайшей окрестности частоты первого электромеханического резонанса. По оси ординат откладываются значения модуля функции $Z_{эл}(\omega)$ в омах, по оси абсцисс – безразмерная частота $\gamma\alpha = \omega\alpha/v^D$, где $v^D = \sqrt{c_{33}^D/\rho_0}$ – скорость плоских волн сжатия-растяжения, при определении которой не учитываются потери в пьезоэлектрике. Расчеты выполнялись для диска с отношением $R/\alpha = 12,5$. Остальные параметры указаны в комментариях к рис. 5. Варьируемым параметром семейства кривых на рис. 8 является механическая добротность Q_m , которой присваивались значения 60, 80, 100 и 120 единиц. Значения добротности проставлены возле соответствующих кривых. Отчетливо видно, что наибольшему значению Q_m соответствует наименьшее значение электрического импеданса $Z_{эл}(\omega_p)$, который, как следует из формулы (47), имеет положительные действительные значения, т. е. $|Z_{эл}(\omega_p)| \equiv Z_{эл}(\omega_p)$.

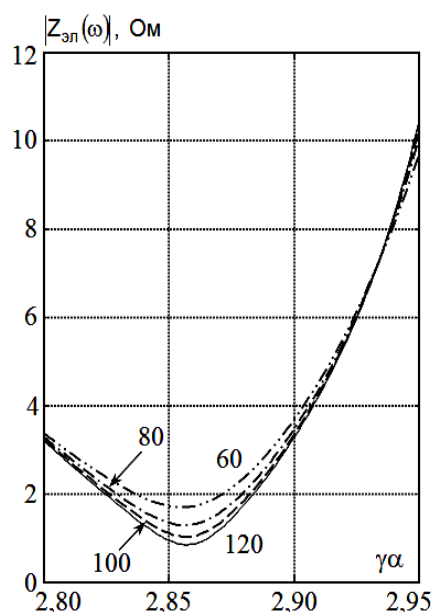


Рис. 8. Расчет по формуле (41) модуля электрического импеданса диска в окрестности частоты первого электромеханического резонанса

Поскольку величина $Z_{эл}(\omega_p)$ является измеряемой в реальном эксперименте, постольку из выражения (47) следует оценка механической добротности Q_m на частоте первого толщинного электромеханического резонанса

$$Q_m = \frac{K_{33}^2 \Psi(\omega_p)}{2Z_{эл}(\omega_p) \omega_p C_\partial^\varepsilon (1 + K_{33}^2)}. \quad (48)$$

Необходимо особо отметить, что механическая добротность Q_m , найденная по формуле (20) (обозначим эту добротность символом $Q_m^{(p)}$), и механическая добротность $Q_m^{(z)}$, определенная выражением (48), не равны друг другу. Более того, должно выполняться неравенство $Q_m^{(p)} > Q_m^{(z)}$. Причина такого положения вещей в достаточной мере очевидна – потери энергии на вязкое трение возрастают с ростом частоты.

Из теории Лифшица–Пархомовского–Меркулова [3] следует, что коэффициент β затухания ультразвука в широком диапазоне частот можно описать следующим выражением:

$$\beta \cong \delta_1 f^2 + \delta_2 f^4,$$

где δ_1 и δ_2 – структурные параметры, числовые значения которых определяются среднестатистическими размерами зерен материала; f – циклическая частота.

Коэффициент затухания β и механическая добротность Q_m связаны между собой следующим образом: в области средних частот $\beta = \lambda / (2Q_m^{(p)})$, в области высоких частот $\beta = \gamma / (2Q_m^{(z)})$, где λ и γ - волновые числа радиальных и толщинных колебаний круглого диска. Зная значения механических добротностей $Q_m^{(p)}$ и $Q_m^{(z)}$ на частотах первого и второго радиального, а также первого и второго толщинного электромеханических резонансов, можно построить оценки частотной зависимости механической добротности в области средних и высоких частот. Кроме того, можно сформировать оценку частотной зависимости добротности в переходном частотном диапазоне. Указанные оценки чрезвычайно важны при математическом моделировании функциональных устройств пьезоэлектроники, которые работают в широком частотном диапазоне.

Выводы. Основные результаты настоящей статьи можно зафиксировать следующим образом:

1. Построено выражение для расчета электрического импеданса колеблющегося пьезокерамического диска в области средних частот, где вектор смещения материальных частиц диска практически полностью определяется радиальным компонентом.

2. С помощью метода усреднения решена система дифференциальных уравнений в частных производных и на этом основании построена математическая модель электрического импеданса пьезокерамического диска в области высоких частот, где вектор смещения материальных частиц определяется радиальным и аксиальным компонентами.

3. Показано, что радиальные колебания практически не оказывают влияния на числовые значения частот толщинного электромеханического резонанса и антирезонанса.

Список литературы

1. Петрищев О. Н. Определение электрического импеданса пьезокерамического диска и его расчет в области низких частот / О. Н. Петрищев, К. В. Базило // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2016. – № 3.
2. Улитко А. Ф. Амплитуды и фазы продольных колебаний пьезокерамических стержней с учетом переменной механической добротности / А. Ф. Улитко. – К. : Видав.-поліграф. центр «Київський університет», 2004. – С. 204–208.
3. Пападакис Э. Затухание ультразвука, обусловленное рассеянием в поликристаллических средах. – В кн. Физическая акустика. Т. IV, часть Б. Приложения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела / Э. Пападакис. – М. : Мир, 1970. – С. 317–381.

References

1. Petrishchev, O. N. and Bazilo, C. V. (2016) Determination of electrical impedance of piezoceramic disk and its calculation in low frequencies region. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu*, No. 3 [in Russian].
2. Ulitko, A. F. (2004) Amplitudes and phases of longitudinal oscillations of piezoceramic rods considering a variable mechanical quality factor. Kiev: Vydav.-poligraf. tsentr "Kyivskyy universytet", pp. 204–208 [in Russian].
3. Papadakis, E. (1970) Ultrasound attenuation due to scattering in polycrystalline media. In: *Physical Acoustics, Vol. IV, Part B. Applications of physical acoustics in quantum physics and solid state physics*. Moscow: Mir, pp. 317–381 [in Russian].

O. N. Petrishchev¹, *Dr.Tech.Sc., professor,*
C. V. Bazilo², *Ph.D. (Eng.), associate professor*

¹National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"
Peremogy ave., 37, Kyiv, 03056, Ukraine

²Cherkasy State Technological University
Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine

DETERMINATION OF ELECTRICAL IMPEDANCE OF PIEZOCERAMIC DISK AND ITS CALCULATION IN MEDIUM AND HIGH FREQUENCY REGIONS

The final goal of mathematical modeling of physical condition of vibrating piezoelectric elements is a qualitative and quantitative description of characteristics and parameters of existing electrical and elastic fields. It is clear that to obtain meaningful and reliable quantitative estimates of physical condition parameters of piezoelectric (piezoceramic) element is not possible without reliable data on the values of physical and mechanical constants of the materials.

Thus, it is necessary to build noncontradictory method of material constants experimental determination of piezoelectric ceramics, which delivers reliable values of at least three modules of elasticity, two elements of the matrix of piezoelectric coefficients and one element of the matrix of dielectric constants, which is the purpose of the work.

The main results of this paper can be written as follows:

– at sufficiently general initial assumptions a mathematical description of electrical impedance of oscillating thin piezoceramic disk with end surfaces continuous covering by electrodes in vacuum is obtained;

– the expression for electrical impedance calculating of oscillating piezoceramic disk at middle frequencies is built, where the vector of disk's material particles displacement is almost completely determined by radial component;

– with the help of the averaging method a system of differential equations in partial derivatives is solved, and on this basis, a mathematical model of electrical impedance of piezoceramic disk at high frequencies is built, where the vector of material particles displacement is determined by radial and axial components.

Keywords: *thin disk, piezoelectric ceramics, electrical impedance, radial and axial components of vector of piezoceramic material particles displacement.*

Статтю представляє д.т.н., професор О. М. Петріщев, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут».