

О. Н. Петрищев¹, д.т.н., профессор,
К. В. Базило², к.т.н., доцент

¹Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»
просп. Победы, 37, Киев, 03056, Украина

²Черкасский государственный технологический университет
б-р Шевченко, 460, Черкасы, 18006, Украина

ПРИНЦИПЫ И МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИСКОВЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТРАНСФОРМАТОРОВ С СЕКТОРНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

Пьезоэлектрические диски с секторным электродированием поверхности являются практически основным элементом многих микроэлектромеханических систем. Однако в настоящее время отсутствуют надежные и достоверные методики построения математических моделей пьезоэлектрических устройств, которые могли бы использоваться в качестве теоретических основ расчета характеристик и параметров этого класса функциональных элементов современной пьезоэлектроники. В результате исследования математической модели реального устройства можно определить тот набор геометрических, физико-механических и электрических параметров реального объекта, который обеспечивает реализацию технических показателей функционального элемента пьезоэлектроники оговоренных в техническом задании. Это существенно сокращает время и стоимость разработки новых функциональных элементов пьезоэлектроники.

Основной результат настоящей статьи можно зафиксировать следующим образом: предложена совокупность вычислительных процедур, опирающихся на фундаментальные принципы механики и электродинамики, последовательное выполнение которых позволяет построить математическую модель дискового пьезоэлектрического трансформатора с секторными электродами в первичной и вторичной электрических цепях. Впервые предложена схема построения математической модели, которая позволяет естественным образом учесть весь набор геометрических, физико-механических и электрических параметров реальной конструкции пьезоэлектрического трансформатора.

Ключевые слова: пьезоэлектрический трансформатор, физические процессы, математическая модель, секторные электроды.

Введение. Пьезоэлектрические диски с частичным электродированием одной или двух поверхностей достаточно часто используются для создания различных функциональных устройств пьезоэлектроники [1]. Диски с секторным электродированием поверхности являются практически основным элементом многих микроэлектромеханических систем [2]. Множественность и многообразие практического применения дисков с секторным электродированием естественным образом стимулирует теоретические исследования, целью которых является прогнозирование характеристик и технических параметров устройств пьезоэлектроники, которые создаются на их основе. Прогноз осуществляется на основании математической модели, которая является основным результатом теоретического

описания реального устройства. Практическая значимость адекватной реальному объекту математической модели очевидна. В результате исследования математической модели реального устройства можно определить тот набор геометрических, физико-механических и электрических параметров реального объекта, который обеспечивает реализацию технических показателей функционального элемента пьезоэлектроники оговоренных в техническом задании. Это существенно сокращает время и стоимость разработки новых функциональных элементов пьезоэлектроники. Стоимость сэкономленных ресурсов составляет коммерческую цену математической модели.

В тонких пьезоэлектрических дисках с разрезными электродами возникают неосе-

симметричные упругие колебания. Теоретические и экспериментальные исследования кинематических характеристик неосесимметричных планарных колебаний в пьезоэлектрических тонких дисках вообще и в дисках с частичным электродированием одной или двух поверхностей в частности начались во второй половине двадцатого века. Результаты этих работ в известной мере обобщены в монографии [3]. В настоящее время продолжают публиковаться работы [4-6], в которых рассматриваются различные аспекты теории неосесимметричных планарных колебаний в тонких пьезоэлектрических дисках. Упомянутые выше работы объединяет, если так можно сказать, кинематический подход к описанию неосесимметричных колебаний, т. е. подход который учитывает сам факт отсутствия осевой симметрии (ряд по тригонометрическим $\cos m\varphi$ или $\sin m\varphi$, где $m=1,2,3,\dots$; φ – окружная координата цилиндрической системы координат), но не принимаются во внимание реальные условия возбуждения и существования этих колебаний. Так, в монографии [3] при построении теории планарных неосесимметричных колебаний в тонком пьезокерамическом диске было неправомерно использовано представление Гельмгольца вектора смещения материальных частиц колеблющегося пьезокерамического диска через скалярный и векторный потенциалы. Неправомерность заключается в том, что в анизотропных упругих средах представление Гельмгольца не приводит к распаду уравнения движения на два уравнения Гельмгольца относительно скалярного и векторного потенциалов. Скалярный и векторный потенциалы в монографии [3] записаны как решения соответствующих уравнений Гельмгольца. Последнее приводит к выражениям для расчета компонентов вектора смещения материальных частиц пьезокерамического диска, в которых присутствуют цилиндрические функции целочисленных порядков, что не соответствует реальному положению вещей. Следует также отметить, что во всех работах не рассматривается и не учитывается реальное электрическое состояние элементов объема пьезокерамического диска под различными электродами, что исключает саму возможность использования публикуемых теоретических построений в качестве методики расчета передаточных характеристик функциональных элементов пьезоэлектроники на основе дисков с разрезными электродами.

Сказанного выше вполне достаточно для вывода о том, что в настоящее время отсутствуют математические модели дисковых пьезокерамических элементов с частичным электродированием одной или двух поверхностей, которые в достаточной мере адекватны реальным объектам.

Целью настоящей статьи является изложение принципов и методов построения математических моделей дисковых пьезокерамических трансформаторов с разрезными электродами.

1. Схема построения математической модели дискового пьезоэлектрического трансформатора с секторными электродами

Рассмотрим диск из поляризованной по толщине пьезокерамики типа ЦТС. Материал диска имеет плотность ρ_0 , модули упругости $c_{\beta\lambda}^E$ (β и λ – индексы Фойгта [7]), пьезоэлектрические модули $e_{k\beta}$ ($k=1,2,3$) и диэлектрические проницаемости χ_{ij}^e ($i,j=1,2,3$). Матрицы материальных констант пьезокерамики записываются в следующем виде:

$$\|c_{\beta\lambda}^E\| = \begin{vmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & & & & c_{55}^E & 0 \\ & & & & & c_{66}^E \end{vmatrix}, \quad (1)$$

$$\|e_{k\beta}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$$\|\chi_{ij}^e\| = \begin{vmatrix} \chi_{11}^e & 0 & 0 \\ & \chi_{22}^e & 0 \\ & & \chi_{33}^e \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Элементы матрицы (1) соотносятся между собой следующим образом: $c_{11}^E = c_{22}^E \neq c_{33}^E$; $c_{12}^E = c_{13}^E = c_{23}^E$; $c_{44}^E = c_{55}^E$; $c_{66}^E = (c_{11}^E - c_{12}^E)/2$. Между элементами матрицы пьезоэлектрических модулей имеются следующие количественные соотношения: $e_{15} = e_{24}$; $e_{31} = e_{32} \neq e_{33}$, причем, как показано в монографии [7], $e_{15} = (e_{33} - e_{31})/2$. Для поляризованной по толщине диска пьезокерамики диэлектрические проницаемости χ_{ij}^e соотносятся между собой следующим образом: $\chi_{11}^e = \chi_{22}^e \neq \chi_{33}^e$.

Будем полагать, что пьезоэлектрический диск не имеет механических контактов с другими материальными объектами, т. е. удерживается в пространстве гибкими и невесомыми нитями. Это позволяет говорить, что диск не испытывает реакции со стороны окружающей среды, т. е. фактически находится в вакууме.

Нижняя поверхность диска $z = 0$ (z – координатная линия цилиндрической системы координат (ρ, φ, z) , сопряженная с осью x_3 праввинтовой декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3) (рис. 1)) покрыта тонким слоем металла и заземлена, т. е. в любой момент времени её электрический потенциал равен нулю. Верхняя поверхность $z = \alpha$ диска покрывается двумя секторными электродами (позиции 1 и 2 на рис. 1). Секторные электроды 1 и 2 разделяет неэлектропроводный зазор, ширина которого существенно меньше толщины α пьезоэлектрического диска.

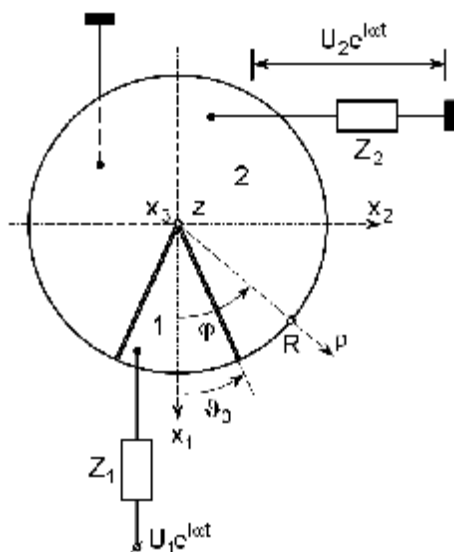


Рис. 1. Расчетная схема объекта

На секторный электрод 1 подается гармонически изменяющаяся во времени разность электрических потенциалов $U_0 e^{i\omega t}$ (U_0 – амплитуда разности электрических потенциалов на электроде 1; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; ω – круговая частота смены знака электрического потенциала; t – время). Символом Z_1 обозначено комплексное выходное сопротивление источника электрического сигнала. Очевидно, что $U_0 = U_1 Z_{\text{эл}}^{(1)}(\omega) / [Z_1 + Z_{\text{эл}}^{(1)}(\omega)]$, где

U_1 – амплитудное значение разности потенциалов на выходе источника электрических сигналов; $Z_{\text{эл}}^{(1)}(\omega)$ – электрический импеданс элемента пьезоэлектрического диска под секторным электродом 1. Электрический потенциал формирует под электродом 1 переменное электрическое поле, которое порождает в объеме пьезоэлектрического диска гармонически изменяющиеся во времени упругие деформации. Вследствие прямого пьезоэлектрического эффекта гармонические колебания материальных частиц диска генерируют на секторном электроде 2 поляризационный заряд $q_2(t) = Q_2 e^{i\omega t}$, где Q_2 – амплитудное значение поляризационного заряда. Поляризационный заряд $q_2(t)$ своим электрическим полем перемещает свободные носители электричества (электроны) в проводнике электрического тока, который соединяет электрическую нагрузку Z_2 с секторным электродом 2. При протекании электрического тока через комплексное сопротивление Z_2 на нем выделяется разность потенциалов $U_2 e^{i\omega t}$, где U_2 – амплитудное значение разности потенциалов во вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора.

Математической моделью пьезоэлектрического трансформатора будем называть аналитическую конструкцию $K(\omega, \Pi)$ (символ Π обозначает набор геометрических, физико-механических и электрических параметров трансформатора), которая определяется следующим образом:

$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2 e^{i\omega t}}{U_1 e^{i\omega t}} = \frac{U_2}{U_1}. \quad (4)$$

Функция $K(\omega, \Pi)$ по своему физическому содержанию имеет смысл коэффициента трансформации дискового пьезоэлектрического трансформатора.

Рассмотрим вычислительные процедуры, последовательная реализация которых позволит построить физически содержательную математическую модель пьезоэлектрического трансформатора.

Из показанной на рис. 1 расчетной схемы следует, что электрический потенциал на поверхности диска $z = \alpha$ зависит от окружной координаты φ так, как это показано на рис. 2.

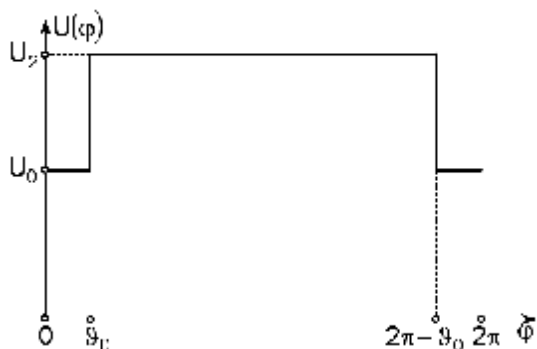


Рис. 2. Угловое распределение электрического потенциала на поверхности $z = \alpha$

По оси ординат на рис. 2 отложено амплитудное значение $U(\varphi)$ электрического потенциала. Амплитудное значение потенциала U_2 может быть больше, как это показано на рис. 2, потенциала U_0 , а может быть и меньше амплитудного значения U_0 . Это не принципиально. Принципиальным является то, что величины U_0 и U_2 являются постоянными в своих угловых секторах. Показанную на рис. 2 функцию $U(\varphi)$ можно представить следующим рядом

$$U(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^{(m)} \cos m\varphi, \quad (5)$$

где коэффициенты разложения $\Phi^{(m)}$

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)} &= U_0 \frac{\vartheta_0}{\pi} + U_2 \frac{\pi - \vartheta_0}{\pi}; \\ \Phi^{(m)} &= \frac{2 \sin m\vartheta_0}{m\pi} (U_0 - U_2) \forall m \geq 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Присутствие в разложении (5) нулевой, т. е. осесимметричной составляющей $\Phi^{(0)}$ позволяет предположить, что компоненты вектора $\vec{u}(\rho, \varphi, z, t)$ смещения материальных частиц колеблющегося пьезокерамического диска, т. е. величины $u_\rho(\rho, \varphi, z, t)$, $u_\varphi(\rho, \varphi, z, t)$ и $u_z(\rho, \varphi, z, t)$, можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} u_{\left(\begin{smallmatrix} \rho \\ z \end{smallmatrix}\right)}(\rho, \varphi, z, t) &= e^{i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} U_{\left(\begin{smallmatrix} \rho \\ z \end{smallmatrix}\right)}^{(m)}(\rho, z) \cos m\varphi, \\ u_\varphi(\rho, \varphi, z, t) &= -e^{i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} U_\varphi^{(m)}(\rho, z) \sin m\varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

где $U_\beta^{(m)}(\rho, z)$ ($\beta = \rho, \varphi, z$) – амплитудное значение m -ой окружной гармоники β -го компонента вектора смещения материальных

частиц пьезокерамического диска. При этом, очевидно, $U_\varphi^{(0)}(\rho, z) \equiv 0$. Следует подчеркнуть, что вследствие малости зазора между секторными электродами 1 и 2, выражения (7) определяют единое поле смещений материальных частиц диска, которое существует в круге $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Смещения материальных частиц пьезокерамического диска ограничиваются упругими напряжениями

$\sigma_{ij}(\rho, \varphi, z, t) = \sigma_{ij}(\rho, \varphi, z) e^{i\omega t}$, амплитудные значения $\sigma_{ij}(\rho, \varphi, z)$ которых определяются обобщенным законом Гука для упругих сред с пьезоэлектрическими эффектами [7]

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad i, j, k, \ell = 1, 2, 3, \quad (8)$$

где $\sigma_{ij} \equiv \sigma_{ij}(\rho, \varphi, z)$; во всех дальнейших записях список аргументов (ρ, φ, z) в описании амплитудных значений физических величин для краткости записей будет опущен; $\varepsilon_{k\ell}$ – компонент тензора бесконечно малых деформаций; E_k – k -й компонент амплитудного значения вектора напряженности электрического поля в объеме деформируемого пьезоэлектрика.

Принимая во внимание соответствие между индексами 1,2,3 координатных осей правовинтовой декартовой системы координат и символами ρ, φ, z координатных линий цилиндрической системы координат ($1 \Leftrightarrow \rho$; $2 \Leftrightarrow \varphi$; $3 \Leftrightarrow z$), и учитывая структуру матриц (1) и (2) материальных констант, из общей формулировки (8) можно получить следующие выражения для расчета амплитудных значений упругих напряжений:

$$\sigma_{\rho\rho} = c_{11}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{31} E_z, \quad (9)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{11}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{31} E_z, \quad (10)$$

$$\sigma_{zz} = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{33}^E \varepsilon_{zz} - e_{33} E_z, \quad (11)$$

$$\sigma_{\varphi z} = 2c_{44}^E \varepsilon_{\varphi z} - e_{24} E_\varphi, \quad (12)$$

$$\sigma_{\rho z} = 2c_{44}^E \varepsilon_{\rho z} - e_{15} E_\rho, \quad (13)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = 2c_{66}^E \varepsilon_{\rho\varphi}, \quad (14)$$

где $\varepsilon_{\rho\rho}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ и ε_{zz} – деформации сжатия-растяжения вдоль координатных линий ρ , φ и z цилиндрической системы координат; $\varepsilon_{\varphi z}$, $\varepsilon_{\rho z}$ и $\varepsilon_{\rho\varphi}$ – сдвиговые деформации в плоско-

стях, построенных на единичных векторах (ортах) соответствующих координатных линий. При записи выражений (9) – (14) было использовано общепринятое в механике правило – одинаковые по величине материальные константы обозначаются одинаковыми символами. Формулы для расчета деформаций сжатия-растяжения и деформаций сдвига имеют вид [7]:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_{\rho}}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_{\rho}}{\rho}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \rho_0 \omega^2 u_{\rho} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{\rho} \sigma_{\varphi\rho} + \rho_0 \omega^2 u_{\varphi} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \sigma_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \sigma_{z\rho} + \rho_0 \omega^2 u_z = 0. \quad (18)$$

На поверхностях колеблющегося в вакууме пьезокерамического диска должны, как того требует третий закон Ньютона, выполняться следующие условия:

$$\sigma_{zz}(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad \sigma_{zz}(\rho, \varphi, \alpha) = 0, \quad (19)$$

$$\sigma_{z\rho}(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad \sigma_{z\rho}(\rho, \varphi, \alpha) = 0, \quad (20)$$

$$\sigma_{z\varphi}(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad \sigma_{z\varphi}(\rho, \varphi, \alpha) = 0, \quad (21)$$

$$\sigma_{\rho\rho}(R, \varphi, z) = 0, \quad (22)$$

$$\sigma_{\rho\varphi}(R, \varphi, z) = 0. \quad (23)$$

Электрическая составляющая физического состояния колеблющегося пьезокерамического диска определяется вектором электрической индукции $\vec{D}(\rho, \varphi, z, t) = \vec{D}(\rho, \varphi, z) e^{i\omega t}$, амплитудные значения компонентов которого в общем случае определяются следующим образом [7]

$$D_k = e_{knm} \varepsilon_{nm} + \chi_{k\ell}^e E_{\ell}. \quad (24)$$

Применительно к рассматриваемой ситуации из общего определения (24) следует, что

$$D_{\rho} = 2e_{15} \varepsilon_{\rho z} + \chi_{11}^e E_{\rho}, \quad D_{\varphi} = 2e_{24} \varepsilon_{\varphi z} + \chi_{11}^e E_{\varphi}, \quad (25)$$

$$D_z = e_{31} (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + e_{33} \varepsilon_{zz} + \chi_{33}^e E_z. \quad (26)$$

Из первого уравнения Максвелла $\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t$ ($\vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля; $\vec{J}$ – вектор плотности тока электрической проводимости) в случае идеального диэлектрика ($\vec{J} = 0$) следует, что

$$\text{div} \vec{D} = 0. \quad (27)$$

$$\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right); \quad \varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\rho}}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right);$$

$$\varepsilon_{\rho\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi}}{\rho} \right). \quad (15)$$

Амплитудные значения компонентов тензора упругих напряжений удовлетворяют уравнениям установившихся колебаний (второму закону Ньютона в дифференциальной форме), которые в цилиндрической системе координат записываются в следующем виде:

Условие (27) имеет смысл условия отсутствия свободных носителей электричества и с хорошей степенью точности реальной электрической проводимости (меньше 10^{-4} См/м) пьезоэлектрической керамики.

В работе [8] показано, что в области частот до 10 МГц магнитная составляющая электромагнитного поля в деформируемой пьезокерамике настолько мала, что второе уравнение Максвелла $\text{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ можно записать в виде $\text{rot} \vec{E} \approx 0$. Из последней записи следует, что вектор напряженности переменного электрического поля в объеме деформируемой пьезокерамики является безвихревым. По этой причине он может быть определен через скалярный электрический потенциал $\Phi(\rho, \varphi, z, t) = \Phi(\rho, \varphi, z) e^{i\omega t}$ стандартным образом, т. е.

$$\vec{E} = -\text{grad} \Phi. \quad (28)$$

Подставляя компоненты вектора напряженности электрического поля, определенные векторным соотношением (28), в формулы (25) и (26), а полученные результаты – в условие (27), получаем дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно искомого амплитудного значения $\Phi(\rho, \varphi, z)$ скалярного электрического потенциала. Общее решение этого уравнения должно удовлетворять следующим условиям:

$$\Phi(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad \Phi(\rho, \varphi, \alpha) = U(\varphi), \quad (29)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} \approx 0. \quad (30)$$

Приближенное граничное условие (30) выполняется тем точнее, чем больше значение диэлектрической проницаемости χ_{11}^{ε} превосходит диэлектрическую постоянную $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м [8].

Совместное решение дифференциальных уравнений (16) – (18) и (27) с последующим удовлетворением граничным условиям (19) – (23) и (29), (30) сопряжено с практически непреодолимыми математическими проблемами. Ситуация существенно облегчается и упрощается в том случае, когда размеры диска (толщина α и радиус R) удовлетворяют сильному неравенству $\alpha/R \ll 1$, т. е. когда рассматривается тонкий пьезокерамический диск.

В диапазоне частот, в котором длина волны упругих колебаний тонкого пьезокера-

$$\varepsilon_{zz}(\rho, \varphi) = -\frac{c_{12}^E}{c_{33}^E} [\varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)] + \frac{e_{33}}{c_{33}^E} E_z(\rho, \varphi). \quad (31)$$

Список аргументов, в котором указаны только лишь переменные ρ и φ , подчеркивает то обстоятельство, что напряженно-деформированное состояние колеблющегося тонкого пьезокерамического диска не зависит от аксиальной координаты z .

Так как на поверхностях $z = 0$ и $z = \alpha$, где существует электродное покрытие, компоненты вектора электрической индукции $D_\rho = D_\varphi = 0$, то в области низких частот, когда длина волны упругих колебаний соизмерима с радиусом тонкого диска, последнее равенство должно выполняться в любой точке объема тонкого диска. Из этого факта следует, что

$$E_\rho = -2 \frac{e_{15}}{\chi_{11}^{\varepsilon}} \varepsilon_{\rho z}, \quad E_\varphi = -2 \frac{e_{24}}{\chi_{11}^{\varepsilon}} \varepsilon_{\varphi z}.$$

где $e_{31}^* = e_{31} - e_{33} c_{12}^E / c_{33}^E$ и $\chi_{33}^* = \chi_{33}^{\varepsilon} + e_{33}^2 / c_{33}^E$ – пьезоэлектрический модуль и диэлектрическая проницаемость тонкого пьезокерамического диска, в котором реализован режим планарных колебаний.

$$\alpha D_z(\rho, \varphi) = e_{31}^* [\varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)] + \chi_{33}^* E_z(\rho, \varphi),$$

Принимая во внимание граничное условие (29), последнее выражение можно переписать следующим образом

$$D_z(\rho, \varphi) = e_{31}^* [\varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)] - \chi_{33}^* \frac{U(\varphi)}{\alpha}. \quad (35)$$

мического диска соизмерима с его радиусом, можно утверждать, что напряженно-деформированное состояние практически не меняется по толщине диска. При этом из граничных условий (19) – (21) следует, что нормальное напряжение σ_{zz} и касательные напряжения $\sigma_{z\rho}$ и $\sigma_{z\varphi}$ равны нулю в любой точке на поверхности и в объеме колеблющегося пьезокерамического диска. При этом необходимо понимать, что деформация сжатия-растяжения $\varepsilon_{zz} \neq 0$, поскольку существуют деформации сжатия-растяжения $\varepsilon_{\rho\rho}$ и $\varepsilon_{\varphi\varphi}$. Приравняв нулю правую часть выражения (11), получаем определение деформации сжатия-растяжения ε_{zz} через деформации $\varepsilon_{\rho\rho}$ и $\varepsilon_{\varphi\varphi}$:

Подставляя последние равенства в определение (12) и (13), получаем

$$\sigma_{\varphi z} = 2c_{44}^D \varepsilon_{\varphi z}, \quad \sigma_{\rho z} = 2c_{44}^D \varepsilon_{\rho z}, \quad (32).$$

где $c_{44}^D = c_{44}^E + e_{15}^2 / \chi_{11}^{\varepsilon} = c_{44}^E + e_{24}^2 / \chi_{11}^{\varepsilon}$ – модули упругости для режима постоянства (равенства нулю) радиального и окружного компонентов вектора электрической индукции.

В ситуации, когда $D_\rho = D_\varphi = 0$, условие (27) принимает простой вид, а именно

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad (33)$$

откуда следует, что аксиальный компонент вектора электрической индукции не зависит от значений аксиальной координаты z . Учитывая все сказанное выше, выражение (26) можно записать в следующем виде:

$$D_z(\rho, \varphi) = e_{31}^* [\varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)] + \chi_{33}^* E_z(\rho, \varphi), \quad (34)$$

Так как $E_z = -\partial \Phi / \partial z$, то интегрируя левую и правую части выражения (34) по переменной z в пределах от нуля до α , и учитывая при этом условие (33), приходим к следующему результату

Сравнивая между собой два физически эквивалентных определения (34) и (35) аксиального компонента $D_z(\rho, \varphi)$, приходим к выводу, что

$$E_z(\rho, \varphi) = E_z(\varphi) = -U(\varphi) / \alpha. \quad (36)$$

Подставляя выражения (31) и (36) в определения (9) и (10) нормальных напряжений $\sigma_{\rho\rho}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$, получаем следующие результаты:

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi) = c_{11}^* \varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + c_{12}^* \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) + e_{31}^* U(\varphi)/\alpha, \quad (37)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) = c_{12}^* \varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + c_{11}^* \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) + e_{31}^* U(\varphi)/\alpha, \quad (38)$$

где $c_{11}^* = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$ и $c_{12}^* = c_{12}^E (1 - c_{12}^E / c_{33}^E)$ – модули упругости тонкого пьезокерамического диска для режима планарных колебаний.

Уравнения (16) и (17) установившихся гармонических колебаний принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} [\sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi) - \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)] + \rho_0 \omega^2 u_\rho(\rho, \varphi) = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi\rho}(\rho, \varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{2}{\rho} \sigma_{\varphi\rho}(\rho, \varphi) + \rho_0 \omega^2 u_\varphi(\rho, \varphi) = 0, \quad (40)$$

где напряжения $\sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi)$, $\sigma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) = \sigma_{\varphi\rho}(\rho, \varphi)$ и $\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)$ определены выражениями (37), (14) и (38) соответственно. Уравнение (18) с точностью до бесконечно малых второго порядка превращается в тождество $0 = 0$. Решения системы уравнений (39), (40), т. е. амплитудные значения компонентов вектора смещения материальных частиц $u_\rho(\rho, \varphi)$ и $u_\varphi(\rho, \varphi)$ должны обеспечивать выполнение граничных условий (22) и (23). Кроме того, функции $u_\rho(\rho, \varphi)$ и $u_\varphi(\rho, \varphi)$ должны обеспечивать нулевые значения сдвиговых напряжений $\sigma_{\varphi z}$ и $\sigma_{\rho z}$ в любой точке объема тонкого пьезокерамического диска. Из определений (32) следует, что $\sigma_{\varphi z} = \sigma_{\rho z} = 0$ тогда, когда выполняются условия

$$\varepsilon_{\varphi z} = \varepsilon_{\rho z} = 0. \quad (41)$$

Условия (41) фактически запрещают поперечный изгиб, и могут быть названы условиями планарности напряженно-деформированного состояния тонкого пьезокерамического диска.

Ниже будет показано, что решения системы уравнений (39), (40), которые удовлетворяют граничному условию (23) и условиям (41), с прогнозируемой точностью можно записать в следующем виде

$$u_\rho(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n F_\rho^{(n)}(\rho, \Pi) \cos n\varphi, \quad (42)$$

$$u_\varphi(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n F_\varphi^{(n)}(\rho, \Pi) \sin n\varphi, \quad (43)$$

где A_n – подлежащие определению константы; $F_\rho^{(n)}(\rho, \Pi)$ и $F_\varphi^{(n)}(\rho, \Pi)$, причем $F_\varphi^{(0)}(\rho, \Pi) = 0$, вполне определенные функции радиальной координаты ρ и набора Π геометрических, физико-механических и электрических параметров пьезоэлектрического трансформатора.

Определим амплитудное значение U_2 электрического потенциала на секторном электроде 2 (рис. 1).

Очевидно, что $U_2 = Z_2 I_2$, где I_2 – амплитудное значение электрического тока в проводнике, который соединяет электрическую нагрузку Z_2 и секторный электрод 2 вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора. Амплитуда I_2 переменного электрического тока определяется через амплитудное значение электрического заряда Q_2 на электроде 2 следующим образом [7]:

$$I_2 = -i\omega Q_2. \quad (44)$$

Электрический заряд Q_2 определяется аксиальным компонентом вектора электрической индукции. Подставляя в общее определение (35) формальное разложение (5) и соотношения (42) и (43), можем записать, что

$$D_z(\rho, \varphi) = e_{31}^* \sum_{n=0}^{\infty} A_n W_n(\rho, \Pi) \cos n\varphi - \frac{\chi_{33}^*}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^{(m)} \cos m\varphi, \quad (45)$$

где

$$W_n(\rho, \Pi) = \frac{\partial F_\rho^{(n)}(\rho, \Pi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} [n F_\phi^{(n)}(\rho, \Pi) + F_\rho^{(n)}(\rho, \Pi)]$$

– функция с размерностью единица, деленная на метр, пропорциональная объемной деформации в режиме планарных колебаний тонкого пьезокерамического диска. Необходимо помнить, что формальное разложение электрического потенциала на поверхности $z = \alpha$ удовлетворяет следующему равенству:

$$D_z^{(2)}(\rho, \varphi) = e_{31}^* \sum_{n=0}^{\infty} A_n W_n(\rho, \Pi) \cos n\varphi - \frac{\chi_{33}^*}{\alpha} U_2. \quad (47)$$

Амплитуда электрического заряда на электроде вторичной электрической цепи трансформатора

$$Q_2 = \int_{\vartheta_0}^{2\pi-\vartheta_0} \int_0^R \rho D_z^{(2)}(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = -2e_{31}^* \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\sin n\vartheta_0}{n} \int_0^R \rho W_n(\rho, \Pi) d\rho - C_2^* U_2, \quad (48)$$

где $C_2^* = (\pi - \vartheta_0) R^2 \chi_{33}^* / \alpha$ – электрическая емкость секторного электрода 2.

$$U_2 = 2i\omega Z_2 e_{31}^* \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\sin n\vartheta_0}{n} \int_0^R \rho W_n(\rho, \Pi) d\rho + i\omega Z_2 C_2^* U_2,$$

откуда следует, что

$$U_2 = f_2(\omega) \frac{2e_{31}^* \alpha}{(\pi - \vartheta_0) R^2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n B_n(\omega, \Pi), \quad (49)$$

где $f_2(\omega) = \frac{i\omega Z_2 C_2^*}{1 - i\omega Z_2 C_2^*}$ – функция включения

секторного электрода 2 во вторичную электрическую цепь пьезоэлектрического трансформатора;

$$B_n(\omega, \Pi) = \frac{\sin n\vartheta_0}{n} \int_0^R \rho W_n(\rho, \Pi) d\rho.$$

График модуля функции включения $f_2(\omega)$ показан на рис. 3. По оси абсцисс на рис. 3 отложены значения безразмерной частоты $\Omega = \omega \tau_2$, где $\tau_2 = Z_2 C_2^*$ – постоянная времени вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора. Отчетливо видно, что при $\omega = 0$ функция $f_2(\omega) = 0$. Это означает, что статические поляризационные

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Phi^{(m)} \cos m\varphi = \begin{cases} U_0 & \forall \varphi \in [2\pi - \vartheta_0, \vartheta_0], \\ U_2 & \forall \varphi \in [\vartheta_0, 2\pi - \vartheta_0]. \end{cases} \quad (46)$$

Принимая во внимание соотношение (46), можно записать выражение для расчета амплитудного значения аксиального компонента вектора электрической индукции $D_z^{(2)}(\rho, \varphi)$ под секторным электродом 2 в следующем виде:

Так как $U_2 = -i\omega Z_2 Q_2$, то, принимая во внимание выражение (48), получаем следующее уравнение:

нельзя зарегистрировать электронными приборами с заземленной общей шиной.

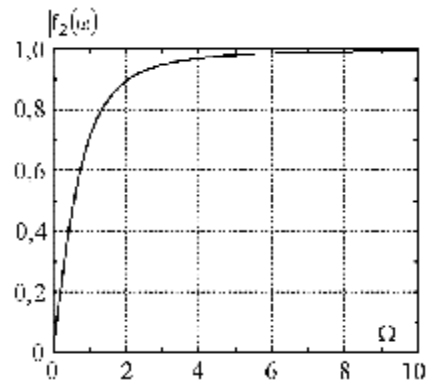


Рис. 3. Изменение модуля функции включения электрода во вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора

Константы A_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) определяются из граничного условия (22), которое с учетом всего сказанного выше может быть записано в следующем виде:

$$\sigma_{\rho\rho}(R, \varphi) = c_{11}^* \sum_{m=0}^{\infty} \left[A_m \Xi_m(R, \Pi) + \frac{e_{31}^*}{\alpha c_{11}^*} \Phi^{(m)} \right] \cos m\varphi = 0, \quad (50)$$

$$\text{где } \Xi_m(R, \Pi) = \left. \frac{\partial F_\rho^{(m)}(\rho, \Pi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} + \frac{k}{R} [m F_\phi^{(m)}(R, \Pi) + F_\rho^{(m)}(R, \Pi)];$$

параметр $k = c_{12}^*/c_{11}^*$; $\Phi^{(m)}$ – весовой множитель формального разложения (5) электрического потенциала.

Сумма знакопеременного ряда (50) будет равна нулю только лишь в том случае, когда все коэффициенты при функциях $\cos m\varphi$ будут равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned} A_0\beta_{00} + A_1\beta_{01} + A_2\beta_{02} + \dots + A_n\beta_{0n} + \dots &= -\frac{e_{31}^*}{\alpha c_{11}^*} U_0 \eta_0, \\ A_0\beta_{10} + A_1\beta_{11} + A_2\beta_{12} + \dots + A_n\beta_{1n} + \dots &= -\frac{e_{31}^*}{\alpha c_{11}^*} U_0 \eta_1, \\ A_0\beta_{m0} + A_1\beta_{m1} + A_2\beta_{m2} + \dots + A_n\beta_{mn} + \dots &= -\frac{e_{31}^*}{\alpha c_{11}^*} U_0 \eta_m, \end{aligned} \quad (52)$$

где $\beta_{00} = \Xi_0(R, \Pi) + \frac{2K_{31}^2 f_2(\omega)}{\pi R^2} B_0(\omega, \Pi)$;

$K_{31}^2 = \frac{(e_{31}^*)^2}{\chi_{33}^* c_{11}^*}$ – квадрат коэффициента электромеханической связи пьезокерамики тонкого диска в режиме планарных колебаний;

$$\begin{aligned} \beta_{01} &= \frac{2K_{31}^2 f_2(\omega)}{\pi R^2} B_1(\omega, \Pi); \\ \beta_{0n} &= \frac{2K_{31}^2 f_2(\omega)}{\pi R^2} B_n(\omega, \Pi); \quad \eta_0 = \frac{\vartheta_0}{\pi}; \\ \beta_{10} &= -\frac{4K_{31}^2 f_2(\omega)}{(\pi - \vartheta_0) R^2} \frac{\sin \vartheta_0}{\pi} B_0(\omega, \Pi); \\ \beta_{11} &= \Xi_1(R, \Pi) - \frac{4K_{31}^2 f_2(\omega)}{(\pi - \vartheta_0) R^2} \frac{\sin \vartheta_0}{\pi} B_1(\omega, \Pi); \\ \beta_{1n} &= -\frac{4K_{31}^2 f_2(\omega)}{(\pi - \vartheta_0) R^2} \frac{\sin \vartheta_0}{\pi} B_n(\omega, \Pi); \quad \eta_1 = \frac{2 \sin \vartheta_0}{\pi}; \\ \beta_{m0} &= -\frac{4K_{31}^2 f_2(\omega)}{(\pi - \vartheta_0) R^2} \frac{\sin m \vartheta_0}{m \pi} B_0(\omega, \Pi); \\ \beta_{m1} &= -\frac{4K_{31}^2 f_2(\omega)}{(\pi - \vartheta_0) R^2} \frac{\sin m \vartheta_0}{m \pi} B_1(\omega, \Pi); \end{aligned}$$

$$A_m \Xi_m(R, \Pi) + \frac{e_{31}^*}{\alpha c_{11}^*} \Phi^{(m)} = 0. \quad (51)$$

Из равенства (51) следует, что коэффициенты A_m определяются в результате решения бесконечной системы алгебраических уравнений. Эта система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \beta_{mn} &= -\frac{4K_{31}^2 f_2(\omega)}{(\pi - \vartheta_0) R^2} \frac{\sin m \vartheta_0}{m \pi} B_n(\omega, \Pi); \\ \beta_{mm} &= \Xi_m(R, \Pi) - \frac{4K_{31}^2 f_2(\omega)}{(\pi - \vartheta_0) R^2} \frac{\sin m \vartheta_0}{m \pi} B_m(\omega, \Pi); \\ \eta_m &= \frac{2 \sin m \vartheta_0}{m \pi}. \end{aligned}$$

Ограничиваясь первыми m коэффициентами A_n ($n = 0, 1, 2, \dots, m$), получаем систему из $M = 1 + m$ алгебраических уравнений, в которых содержатся $M = 1 + m$ искомых коэффициентов $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$. Эта система уравнений разрешается относительно искомых констант единственным образом. Результаты решения системы уравнений (52) имеют вид

$$A_n = -\frac{e_{31}^* U_0}{\alpha c_{11}^*} \frac{D_n(\omega, \Pi)}{DM(\omega, \Pi)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (53)$$

где $D_n(\omega, \Pi)$ – алгебраическое дополнение при коэффициенте A_n ; $DM(\omega, \Pi)$ – определитель системы уравнений (52). Частотно зависимые функции $D_n(\omega, \Pi)$ и $DM(\omega, \Pi)$ определяются следующим образом:

$$D_n(\omega, \Pi) = \det \begin{vmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \dots & \beta_{0(n-1)} & \eta_0 & \beta_{0(n+1)} & \dots & \beta_{0m} \\ \beta_{10} & \beta_{11} & \dots & \beta_{1(n-1)} & \eta_1 & \beta_{1(n+1)} & \dots & \beta_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m0} & \beta_{m1} & \dots & \beta_{m(n-1)} & \eta_m & \beta_{m(n+1)} & \dots & \beta_{mm} \end{vmatrix},$$

$$DM(\omega, \Pi) = \det \begin{vmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \dots & \beta_{0(n-1)} & \beta_{0n} & \beta_{0(n+1)} & \dots & \beta_{0m} \\ \beta_{10} & \beta_{11} & \dots & \beta_{1(n-1)} & \beta_{1n} & \beta_{1(n+1)} & \dots & \beta_{1m} \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ \beta_{m0} & \beta_{m1} & \dots & \beta_{m(n-1)} & \beta_{mn} & \beta_{m(n+1)} & \dots & \beta_{mm} \end{vmatrix},$$

где символ $\det$ означает определитель матрицы.

После определения коэффициентов A_n можно переписать определения (42), (43) и (49) в следующем виде

$$u_p(\rho, \varphi) = -\frac{e_{31}^* U_0}{\alpha C_{11}^* DM(\omega, \Pi)} \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\omega, \Pi) F_p^{(n)}(\rho, \Pi) \cos n\varphi, \quad (54)$$

$$u_\varphi(\rho, \varphi) = -\frac{e_{31}^* U_0}{\alpha C_{11}^* DM(\omega, \Pi)} \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\omega, \Pi) F_\varphi^{(n)}(\rho, \Pi) \sin n\varphi, \quad (55)$$

$$U_2 = -f_2(\omega) \frac{2K_{31}^2 U_0}{(\pi - \vartheta_0) R^2 DM(\omega, \Pi)} \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\omega, \Pi) B_n(\omega, \Pi). \quad (56)$$

Для того, чтобы определить потенциал U_0 на секторном электроде 1 (рис. 1), необходимо рассчитать электрический импеданс $Z_{эл}^{(1)}(\omega)$ части пьезокерамического диска под этим электродом.

В соответствии с законом Ома для участка электрической цепи

$$Z_{эл}^{(1)}(\omega) = U_0 / I_1, \quad (57)$$

где $I_1 = -i\omega Q_1$ – амплитудное значение электрического тока в проводнике, который соединяет источник электрического потенциала $U_1 e^{i\omega t}$ с секторным электродом 1; Q_1 – амплитудное значение электрического заряда на

электроде 1. Электрический заряд Q_1 определяется как обычно, т. е.

$$Q_1 = 2 \int_0^{\vartheta_0} \int_0^R \rho D_z^{(1)}(\rho, \varphi) d\rho d\varphi, \quad (58)$$

где $D_z^{(1)}(\rho, \varphi)$ – амплитудное значение аксиального компонента вектора электрической индукции под секторным электродом 1. Учитывая соотношение (46) и выражения (54) и (55), электрическую индукцию $D_z^{(1)}(\rho, \varphi)$ можно определить следующим образом:

$$D_z^{(1)}(\rho, \varphi) = -\frac{(e_{31}^*)^2 U_0}{\alpha C_{11}^* DM(\omega, \Pi)} \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\omega, \Pi) W_n(\rho, \Pi) \cos n\varphi - \frac{\chi_{33}^*}{\alpha} U_0, \quad (59)$$

Подставляя соотношение (59) в определение (58), получаем выражение для расчета электрического заряда Q_1 :

$$Q_1 = -\frac{C_1^* U_0}{R^2 DM(\omega, \Pi)} \left[\frac{2K_{31}^2}{\vartheta_0} \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\omega, \Pi) B_n(\omega, \Pi) + R^2 DM(\omega, \Pi) \right],$$

где $C_1^* = \vartheta_0 R^2 \chi_{33}^* / \alpha$ – электрическая емкость секторного электрода 1.

Так как $I_1 = -i\omega Q_1$, то электрический импеданс $Z_{эл}^{(1)}(\omega)$ можно определить следующим образом:

где

$$Z_{эл}^{(1)}(\omega) = \frac{R^2 DM(\omega, \Pi)}{i\omega C_1^* \Psi_1(\omega, \Pi)}, \quad (60)$$

$$\Psi_1(\omega, \Pi) = \frac{2K_{31}^2}{\vartheta_0} \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\omega, \Pi) B_n(\omega, \Pi) + R^2 DM(\omega, \Pi).$$

Электрический потенциал U_0 рассчитывается по формуле

$$U_0 = \frac{U_1 Z_{\text{эп}}^{(1)}(\omega)}{Z_1 + Z_{\text{эп}}^{(1)}(\omega)} = U_1 R^2 \frac{DM(\omega, \Pi)}{S(\omega, \Pi)}, \quad (61)$$

где $S(\omega, \Pi) = R^2 DM(\omega, \Pi) + i\omega Z_1 C_1^* \Psi_1(\omega, \Pi)$.

Подставляя выражение (61) в определение (56) потенциала U_2 , получаем следующий результат:

$$U_2 = -f_2(\omega) \frac{2K_{31}^2 U_1}{(\pi - \vartheta_0) S(\omega, \Pi)} \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\omega, \Pi) B_n(\omega, \Pi).$$

$$K(\omega, \Pi) = -\frac{2K_{31}^2 f_2(\omega)}{(\pi - \vartheta_0) S(\omega, \Pi)} \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\omega, \Pi) B_n(\omega, \Pi). \quad (62)$$

При построении выражения (62) были использованы фундаментальные положения механики (законы Ньютона) и электродинамики (уравнения Максвелла), что является существенным аргументом в пользу достоверности математической модели пьезоэлектрического трансформатора с секторными электродами в первичной и вторичной электрических цепях.

Выводы. Основным результатом настоящей статьи можно зафиксировать следующим образом: предложена совокупность вычислительных процедур, опирающихся на фундаментальные принципы механики и электродинамики, последовательное выполнение которых позволяет построить математическую модель дискового пьезоэлектрического трансформатора с секторными электродами в первичной и вторичной электрических цепях. Впервые предложена схема построения математической модели, которая позволяет естественным образом учесть весь набор геометрических, физико-механических и электрических параметров реальной конструкции пьезоэлектрического трансформатора.

Из последнего выражения следует, что математическая модель дискового пьезоэлектрического трансформатора с секторными электродами определяется аналитическим выражением следующего вида:

ричных пластин. К.: Наукова думка, 2008. 272 с.

4. Naciri I., Elmaimouni L., Lefebvre J.-E., Rguiti M., Ratolojanahary F.E., Gryba T. Modeling of MEMS resonator piezoelectric disc partially covered with electrodes. *American Journal of Mechanics and Applications*. 2016. Vol. 4, No. 1. P. 1–9.
5. Staworko M., Uhl T. Modeling and simulation of piezoelectric elements – comparison of available methods. *Mechanics*. 2008. Vol. 27, No. 4. P. 161–171.
6. Leinonen M., Palosaari J., Juuti J., Jantunen H. Combined electrical and electromechanical simulations of a piezoelectric Cymbal harvester for energy harvesting from walking. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2014, 25 (4). P. 391–400.
7. Петрищев О. Н. Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса. К.: Аверс, 2012. 300 с.
8. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. К.: Наукова думка, 1989. 280 с.

Список литературы

1. Джагупов Р. Г., Ерофеев А. А. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления. СПб.: Политехника, 1994. 608 с.
2. Варадан В., Виной К., Джозе К. ВЧ МЭМС и их применение. М.: Техносфера, 2004. 528 с.
3. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електро механічні коливання п'єзоелект-

References

1. Dzhagupov, R. G., Erofeev, A. A. (1994) Piezoelectronic devices of computing, control and monitoring systems. St. Petersburg: Politehnika, 608 p. [in Russian].
2. Varadan, V., Vinoy, K., Jose, K. (2004) RF MEMS and their applications. Moscow: Technosfera, 528 p. [in Russian].
3. Shulga, M. O., Karlash, V. L. (2008) Resonant electromechanical oscillations of piezo-

- electric plates. Kyiv: Naukova dumka, 272 p. [in Ukrainian].
4. Naciri, I., Elmaimouni, L., Lefebvre, J.-E., Rguiti, M., Ratolojanahary, F. E., Gryba, T. (2016) Modeling of MEMS resonator piezoelectric disc partially covered with electrodes. *American Journal of Mechanics and Applications*, vol. 4, No. 1, pp. 1–9.
 5. Staworko, M., Uhl, T. (2008) Modeling and simulation of piezoelectric elements – comparison of available methods. *Mechanics*, vol. 27, No. 4, pp. 161–171.
 6. Leinonen, M., Palosaari, J., Juuti, J., Jantunen, H. (2014) Combined electrical and electromechanical simulations of a piezoelectric Cymbal harvester for energy harvesting from walking. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 25 (4), pp. 391–400.
 7. Petrishchev, O. N. (2012) Harmonic oscillations of piezoceramic elements. Part 1. Harmonic oscillations of piezoceramic elements in vacuum and resonance-antiresonance method. Kyiv: Avers, 300 p. [in Russian].
 8. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F., Shul'ga, N. A. (1989) Mechanics of bound fields in structural elements. Vol. 5. Electroelasticity. Kyiv: Naukova dumka, 280 p. [in Russian].

O. N. Petrishchev¹, *Dr.Tech.Sc., professor,*
C. V. Bazilo², *Ph.D. (Eng.), associate professor*

¹National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"
 Peremogy ave., 37, Kyiv, 03056, Ukraine

²Cherkasy State Technological University
 Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine

PRINCIPLES AND METHODS OF CONSTRUCTING MATHEMATICAL MODELS OF DISK PIEZOELECTRIC TRANSFORMERS WITH SECTOR ELECTRODES

Piezoelectric disks with partial covering by electrodes of one or two surfaces are often used to create various functional piezoelectronic devices. Disks with sector covering by electrodes are almost the main element of many microelectromechanical systems. Currently, there are no reliable and valid methods of constructing of mathematical models of piezoelectric transformers, which could be used as a theoretical basis for characteristics and parameters calculating of this class of functional elements of modern piezoelectronics. As a result of research of mathematical model of a real device, a set of geometrical, physical, mechanical and electrical parameters of a real object that provides implementation of technical indicators of functional element of piezoelectronics specified in the technical task can be determined. This significantly reduces time and cost of new functional elements of piezoelectronics developing. The cost of the saved resources is the commercial price of the mathematical model.

The purpose of this article is to develop principles and methods of mathematical models of disk piezoceramic transformers with cut electrodes constructing.

The main result of this article can be fixed as follows: a set of computational procedures based on fundamental principles of mechanics and electrodynamics is proposed, sequential implementation of which makes it possible to construct a mathematical model of disk piezoelectric transformer with sector electrodes in primary and secondary electric circuits. For the first time, a scheme for mathematical model's constructing is proposed, which allows in a natural way to take into account the entire set of geometrical, physical, mechanical and electrical parameters of areal design of piezoelectric transformer.

Key words: *piezoelectric transformer, physical processes, mathematical model, sector electrodes.*

Статью представляет О. Н. Петрищев, д.т.н., профессор.