

МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО, ТЕХНОЛОГІЇ ТА ОБЛАДНАННЯ СУЧАСНИХ МАШИНОБУДІВНИХ І ХАРЧОВИХ ВИРОБНИЦТВ

УДК 539.3

[0000-0003-0789-4409] **П. О. Стеблянко**, *д.ф.-м.н., професор*,
e-mail: caf-vmi@ukr.net

Університет митної справи та фінансів
вул. В. Вернадського, 2/4, м. Дніпро, 49000, Україна
[0000-0002-3428-4094] **К. Е. Дьомічев**, *к.т.н., доцент*,

e-mail: demichevk@gmail.com

Київський міжнародний університет
вул. Львівська, 49, м. Київ, 03115, Україна
[0000-0001-8688-043X] **О. Д. Петров**, *Ph.D.*

e-mail: caf-vmi@ukr.net

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49000, Україна

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ СТРИЖНЯ З ТРИЛІНІЙНОГО ДВОФАЗНОГО МАТЕРІАЛУ З УРАХУВАННЯМ ТЕМПЕРАТУРИ

В роботі сформульовано феноменологічну модель для опису властивостей сплавів із пам'яттю форм та пам'яттю в точці зміни температури. Встановлено, що класичні матеріальні діаграми – це конверт певного сімейства матеріальних діаграм, побудований за певними законами зміни швидкості та розриву фронту деформації. Для використання феноменологічної моделі з метою дослідження двофазних матеріалів з різними модулями пружності розв'язано додаткову задачу, яка пов'язана з розбудовою миттєвої термомеханічної поверхні. В роботі проведено числове дослідження, як результат показано типову залежність для швидкості розповсюдження фазового переходу від часу. Графік залежності має три ділянки. На першій ділянці швидкість дорівнює нулю, а на третій – досягає постійного значення. Між ними міститься ділянка зі змінною швидкістю. В результаті обчислення дотичного модуля на кожному кроці інтегрування за часом інтегральна діаграма матеріалу, побудована в роботі, теж має три характерні ділянки.

Ключові слова: математичне моделювання, матеріали з пам'яттю форм, фазовий перехід, феноменологічна модель, інтелектуальні матеріали.

Вступ. В умовах сучасного науково-технічного прогресу в різних галузях науки та техніки знаходить застосування все більша кількість нових матеріалів.

Зростання виробництва псевдопружно-пластичних матеріалів або матеріалів з пам'яттю форм, які мають фазові переходи, та їх широке застосування зумовлюють потребу створення нових математичних та комп'ютерних моделей і методів розрахунку з огляду на реально технологічні навантаження та властивості матеріалу.

Сплави, які мають властивість пам'яті форми, псевдопружність та псевдопружно-пластичність, являють собою особливу групу сплавів, що володіють здатністю відновлювати колишню форму навіть після досить великих деформацій. Якщо при низьких температурах матеріал з пам'яттю форми, псевдо-

пружністю та псевдопружнопластичністю деформується пластично, то при цьому деформація може бути поновлена за допомогою порівняно незначного збільшення температури. Механізмом такого поновлення є перетворення з мартенситної фази у початкову аустенітну фазу.

Ключова характеристика матеріалів з пам'яттю форми, псевдопружністю та псевдопружнопластичністю – виникнення мартенситного фазового перетворення між фазами аустеніту і різними варіантами низькотемпературної, низько-симетричної мартенситної фази. Мартенситне перетворення являє собою, головним чином, перетворення зсуву, яке позбавлено дифузії при фазових переходах у твердому тілі. Воно супроводжується створенням ядра і збільшенням мартенситної фази з вихідної фази аустеніту.

Такі характеристики роблять матеріали з пам'яттю форми, псевдопружністю та псевдопружнопластичністю зручними для використання в радіоелектронних елементах конструкцій і пристроях або як складових частин у деяких передових композиційних матеріалах. Сплав NiTi застосовується в більшості випадків через його пам'ять та структурні властивості.

Для моделювання поведінки елементів конструкцій з таких матеріалів потрібно визначати нестационарний термомеханічний стан не тільки на псевдопружній стадії деформування, а й за її межею. Для побудови фізичних співвідношень між напругою та деформацією необхідно знати положення фронту фазового переходу і функцію кінетичного відгуку [1-4]. Така задача є актуальною для математичного та комп'ютерного моделювання матеріалів, які мають фазові переходи, з урахуванням температури.

Метою дослідження є розробка феноменологічної моделі для опису властивостей матеріалу саме в точці при змінному в часі температурному полі. Для опису пружної деформації і деформації фазового перетворення використаємо теорію термомеханічних поверхонь псевдопружного матеріалу.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У роботах [8-10] розв'язано ряд стаціонарних і нестационарних задач теорії термомпружнопластичності. Тут застосовувалися фізичні співвідношення, що описують прості і близькі до них процеси деформування. Розглядалися і процеси деформування по траєкторіях малої кривизни. Використовувалися співвідношення теорії процесів малої кривизни при неізотермічних процесах деформування елемента тіла, які розроблені і отримали експериментальне обґрунтування [4].

Перші сплави з пам'яттю форм були розроблені в середині минулого століття, однак строгих і надійних визначень моделей континуального рівня, необхідного для інженерних застосувань матеріалів, поки не існує. Зв'язок між мікроскопічною і макроскопічною поведінкою дуже складний і досі не розроблений до ступеня, необхідного таким моделям. Частково це пов'язано з досить сильною залежністю механічної реакції на температуру, швидкість навантаження, діапазон деформації, геометрію досліджуваного тіла,

термомеханічну історію, природу навколишнього середовища, а також взаємодією між самими цими параметрами. Різні приклади такого моделювання наведено, наприклад, у роботах [11, 12]. Такі сплави, як NiTi, CuZnAl, CuAlNi, AuCd та інші можуть відновлювати деформації до 3 %. Іншими важливими характеристиками деяких із цих матеріалів є внутрішнє демпфірування, псевдопружності і висока межа пластичності.

Характерною рисою діаграми матеріалу з пам'яттю форм при активному навантаженні є ділянки ідеальної пластичності [13]. Аналогічні ділянки мають місце і при розвантаженні, але при певних температурах.

В роботі [5] запропоновано варіант розв'язку задачі моделювання двофазного матеріалу при силовому навантаженні. Крива напруга-деформації для двофазного псевдопружного матеріалу розглядається як лінійна залежність, що відповідає з урахуванням відповідної точності поставленій автором задачі – розтягування матеріалу. При складному навантаженні, силовому і температурному, крива напруга-деформація буде мати нелінійну залежність.

В роботах [14-15] авторами запропоновано використання теорії термомеханічної поверхні псевдопружного матеріалу для моделювання поведінки елементів конструкцій, існування якої з достатньою мірою точності експериментально підтверджено в роботі [8]. Ця поверхня з певною мірою точності не залежить від виду напруженого стану для деяких класів ізотропних матеріалів. В результаті її можна визначати за допомогою експериментів при силових навантаженнях, зокрема на розтягування циліндричних зразків.

Феноменологічний підхід до моделювання псевдопружних матеріалів при різних видах навантаження запропоновано в роботах [4, 6, 9].

Клас моделей для полікристалічних сплавів з пам'яттю форми – це феноменологічні моделі, які для опису змін мікроструктури через фазове перетворення виходять з термомеханіки континууму з внутрішніми змінними. У подібних моделях зазвичай задають функцію макроскопічної енергії, яка залежить від змінних стану і внутрішніх змінних, що описують ступінь фазового перетворення. Для внутрішніх змінних записують-

ся рівняння еволюції. Макроскопічна енергія і рівняння еволюції приймаються в деякій функціональній формі, яка повинна бути сумісна з термодинамікою. Фундаментальна структура всіх цих моделей є подібною і може класифікуватися як визначальні моделі з внутрішніми змінними стану.

Феноменологічні співвідношення безпосередньо не залежать від параметрів матеріалу на мікрорівні, а залежать від набору параметрів на макрорівні, які визначаються з експериментальних спостережень. Такі моделі можуть бути простими, наприклад моделювання одноосової псевдопружної реакції матеріалів з пам'яттю форми кусково-лінійною функцією, або можуть бути складними, як у тривимірних моделях, що використовують багато параметрів, які повинні бути визначені з великої кількості експериментів. Феноменологічні моделі легко адаптуються до числових методів розв'язання граничних задач на макроскопічному рівні.

Постановка задачі. Узагальнена залежність між напругою σ і деформацією γ , в матеріальній точці моделюється кривою, що зображена на рисунку 1. При побудові такої діаграми задаються точки площини $(\sigma_M(T), \gamma_M(T))$ і $(\sigma_m(T), \gamma_m(T))$, функції $\gamma = \psi_i(\sigma, T)$, $i = 1, 2, 3$ і визначається змінна деформація перетворення $\gamma_T = \psi_3(\sigma, T) - \psi_1(\sigma, T)$.

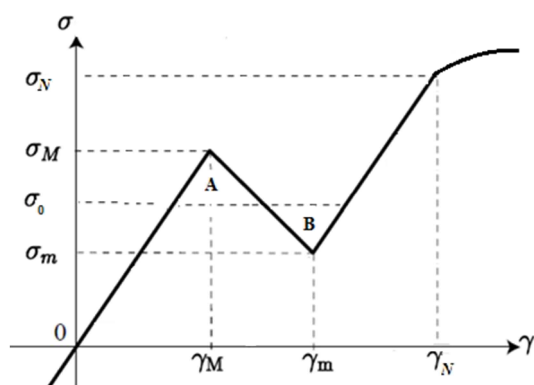


Рисунок 1 – Крива напруга-деформація для двофазного псевдопружного матеріалу при сталій температурі

Функції $\psi_i(\sigma, T)$ повинні задовольняти наступним вимогам:

$$\begin{aligned} \psi_1(0, T) = 0, \quad \psi_1(\sigma_M, T) &= \gamma_M(T), \\ \psi_1'(\sigma, T) > 0, \quad \psi_2(\sigma_M, T) &= \gamma_M(T), \\ \psi_2(\sigma_m, T) &= \gamma_m(T), \quad \psi_2'(\sigma, T) < 0, \\ \psi_2(\sigma_M, T) &= \gamma_M(T), \quad \psi_2(\sigma_m, T) &= \gamma_m(T), \\ \psi_2'(\sigma, T) < 0, \quad \psi_3(\sigma_m, T) &= \gamma_m(T), \\ \psi_3'(\sigma, T) &> 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Поле зміщень у зразку повинно бути неперервним:

$$u(x) = \begin{cases} \psi_3(\sigma, T)x, & 0 \leq x < s, \\ \psi_1(\sigma, T)x + \gamma_T(\sigma, T)s, & s \leq x \leq L. \end{cases} \quad (2)$$

Відповідний кусково-однорідний розподіл деформації в стрижні дається формулою

$$\gamma(x) = \begin{cases} \psi_3(\sigma, T), & 0 \leq x < s, \\ \psi_1(\sigma, T), & s \leq x \leq L. \end{cases} \quad (3)$$

Залежність між збільшенням довжини $u(L) = \delta$ стрижня і напругою визначається виразом (s – положення границі розділу фаз):

$$\delta = \psi_3(\sigma, T)s + \psi_1(\sigma, T)(L - s). \quad (4)$$

Рівняння (4) дає змогу визначити сімейство $\delta(\sigma, s, T)$. Якщо δ задано, то можна знайти напругу σ , розв'язуючи відповідну крайову задачу нелінійної пружності. Водночас з виразу (4) не можна зразу визначити σ , оскільки невідомо положення границі розділу фаз.

Для однозначного розв'язку цієї задачі необхідно надати допоміжну інформацію, окрім рівняння балансу (4), фізичних співвідношень $\gamma = \psi_i(\sigma, T)$, $i = 1, 2, 3$, граничних умов і вимог до гладкості. Зазвичай ці вимоги достатні при відсутності нестійких ділянок діаграми, для звичайних еластичних матеріалів, для яких напруга монотонно зростає зі збільшенням деформації. Порушення єдності виникає в (4), якщо задано σ , а не δ . Ця проблема може бути вирішена шляхом введення поняття рушійної сили f . Вона визначається так:

$$f(\sigma, T) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma_T(\sigma, T) d\sigma, \quad (5)$$

де $\sigma_0 = (\sigma_M + \sigma_m)/2$ – напруга Максвела. Напругу Максвела можна інтерпретувати геометрично як напругу, при якій дві площі, обмежені кривою напруга-деформація, мають рівну площу. Оскільки напруга в стані рівноваги в змішаній фазі повинна знаходитися між

σ_m і σ_M , то діапазон можливих значень рушійної сили $[f_m, f_M]$.

Розглянемо квазістатичний процес, в якому треба визначити функції часу $\sigma = \sigma(t)$, $s = s(t)$, $\delta = \delta(t)$, $T = T(t)$.

Похідна за часом від виразу (1) дає наступне нелінійне рівняння:

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \gamma_T(\sigma)\dot{s} + A_\sigma\dot{\sigma} + A_T\dot{T}, \\ A_\sigma &= \frac{\partial \gamma_T}{\partial \sigma}s + \frac{\partial \psi_1}{\partial \sigma}L, \\ A_T &= \frac{\partial \gamma_T}{\partial T}s + \frac{\partial \psi_1}{\partial T}L.\end{aligned}\quad (6)$$

Точкою позначено похідні за часом.

В загальному випадку дотичний модуль діаграми матеріалу можна визначити з (2) так:

$$\frac{d\sigma}{d\delta} = \frac{1 - \gamma_T(\sigma)\dot{s}/\dot{\delta} - A_T\dot{T}/\dot{\delta}}{A_\sigma}.\quad (7)$$

При його обчисленні треба попередньо визначити функції $\sigma = \sigma(t)$, $s = s(t)$, а для цього до рівняння (6) необхідно додати функцію кінетичного відгуку $\dot{s} = \Phi(f)$ (рис. 2), вираз для рушійної сили (5) і закон зміни температури в часі.

Моделювання трилінійного двофазного матеріалу. Для трилінійного двофазного матеріалу з різними модулями пружності $\mu_1 \neq \mu_3$ і відповідно змінною трансформаційною деформацією γ_T на основі наведених вище формул можна записати залежності між напругою і збільшенням довжини зразка, а також для рушійної сили.

Для отримання розрахункових формул уточненої моделі було розглянуто допоміжну задачу, яка пов'язана з розбудовою миттєвої термомеханічної поверхні. Нехай у тривимірному просторі γ, T, σ задано координати чотирьох точок $P_i(\gamma_i, T_i, \sigma_i)$, $i = 1; 2; 3; 4$. Рівняння термомеханічної поверхні, яка проходить через ці точки, запишемо так:

$$\sigma = a\gamma + bT + c\gamma T + d.\quad (8)$$

Невідомі коефіцієнти a, b, c, d розшукуються з системи, яка побудована на основі цього виразу для заданих чотирьох точок P_i миттєвої термомеханічної поверхні. Після їх обчислення можна будувати таку поверхню за двома сусідніми діаграмами, отриманими для $T = T_1$ і $T = T_2$, на інтервалі $T \in [T_1; T_2]$.

При активному навантаженні сумарна термомеханічна поверхня для псевдопружного матеріалу складається з трьох окремих поверхонь. Це поверхня для пружної частини, поверхня, де здійснюється стрибок деформацій, викликаних фазовим перетворенням, і частини поверхні, для якої матеріал продовжує себе вести пружно (після фазового переходу) і переходить у пластичний стан у точці $(\gamma_N; \sigma_N)$. Аналогічно термомеханічна поверхня задається і при розвантаженні [7].

Рівняння першої такої ділянки $\gamma \in [0; \gamma_M]$, $\sigma \in [0; \sigma_M]$ має вигляд

$$\sigma = a_1\gamma + b_1T + c_1\gamma T + d_1.\quad (9)$$

Звідси отримаємо систему, з якої знайдемо коефіцієнти у виразі (9):

$$\begin{aligned}b_1T_1 + d_1 &= 0, \quad b_1T_2 + d_1 = 0, \\ a_1 + c_1T_1 &= \sigma_M(T_1)/\gamma_M(T_1) = \mu_1(T_1), \\ a_1 + c_1T_2 &= \sigma_M(T_2)/\gamma_M(T_2) = \mu_1(T_2).\end{aligned}\quad (10)$$

Коефіцієнти обраховуємо так:

$$\begin{aligned}b_1 &= 0, \quad d_1 = 0, \quad a_1 = \mu_1(T_1) - c_1T_1, \\ c_1 &= (\mu_1(T_2) - \mu_1(T_1))/(T_2 - T_1),\end{aligned}\quad (11)$$

а з формули (8) отримаємо вираз для термомеханічної поверхні на першій ділянці

$$\sigma = \gamma[\mu_1(T_1) + c_1(T - T_1)].\quad (12)$$

Рівняння поверхні (9) на псевдопружній частині третьої ділянки $\gamma \in [\gamma_m; \gamma_N]$, $\sigma \in [\sigma_m; \sigma_N]$ має вигляд

$$\sigma = a_3\gamma + b_3T + c_3\gamma T + d_3.\quad (13)$$

Коефіцієнти у виразі (13) знаходимо за допомогою заданих точок термомеханічної поверхні

$$\begin{aligned}(\gamma_m(T_1); \sigma_m(T_1)), (\gamma_m(T_2); \sigma_m(T_2)), \\ (\gamma_N(T_1); \sigma_N(T_1)), (\gamma_N(T_2); \sigma_N(T_2)).\end{aligned}$$

Зазначимо, що після переходу в пластичний стан друга нелінійна частина третьої ділянки термомеханічної поверхні матеріалу задається відомим способом [6, 7].

Числові результати. Розглянемо числовий приклад, коли визначаються функції $\sigma = \sigma(t)$, $s = s(t)$ при сталій температурі $T \in [T_1; T_2]$.

На основі формул (5) і (6) запишемо:

$$\dot{\delta} = (k\sigma + b)\dot{s} + (ks + L/\mu_1)\dot{\sigma} + \left[\left(\frac{dk}{dT}\sigma + \frac{db}{dT} \right) s - \frac{L}{\mu_1^2(T)} \frac{d\mu_1(T)}{dT} \right] \dot{T}. \quad (14)$$

$$f(\sigma) = \left(k \frac{\sigma^2}{2} + b\sigma \right) - \left(k \frac{\sigma_0^2}{2} + b\sigma_0 \right), \quad (15)$$

де введено

$$\begin{aligned} k(T) &= 1/\mu_3(T) - 1/\mu_1(T), \\ b(T) &= \gamma_m(T) - \sigma_m(T)/\mu_3(T). \end{aligned} \quad (16)$$

Звідси отримаємо

$$\dot{f}(\sigma) = \gamma_T(\sigma)\dot{\sigma} = (k\sigma + b)\dot{\sigma}. \quad (17)$$

Для трилінійного двофазного матеріалу з однаковими модулями пружності $\mu_1 \equiv \mu_3 = \mu$ отримаємо $k = 0$, $b \equiv \gamma_T = \gamma_m - \sigma_m/\mu$.

В результаті цього спроститься диференціальне рівняння (14)

$$\dot{\delta} = b\dot{s} + L\dot{\sigma}/\mu$$

і вираз для рушійної сили (15)

$$f(\sigma) = b(\sigma - \sigma_0).$$

Границі зміни рушійної сили будуть такими:

$$f_m = b(\sigma_m - \sigma_0), \quad f_M = b(\sigma_M - \sigma_0). \quad (18)$$

Нехай функція кінетичного відгуку $\dot{s} = \Phi(f)$ буде мати вигляд (рисунок 2)

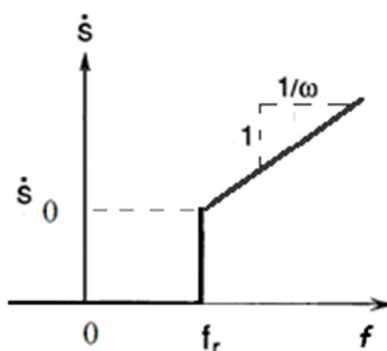


Рисунок 2 – Схематичний графік функції кінетичного відгуку

Ця функція може бути задана аналітично [5]:

$$\dot{s} = \begin{cases} 0; & f \in [0; f_r]; \\ \dot{s}_0 + \omega(f - f_r). & \end{cases} \quad (19)$$

На першій ділянці (до фазового переходу) $\dot{s} \equiv 0; s \equiv 0$. Внаслідок цього рівняння (14) набуде вигляду

$$\dot{\delta} = \psi'_1(\sigma)L\dot{\sigma}. \quad (20)$$

Звідси отримаємо формулу для обчислення дотичного модуля діаграми:

$$\frac{d\sigma}{d\delta} = \frac{1}{\psi'_1(\sigma)L}. \quad (21)$$

На другій ділянці (після фазового переходу) рівняння (14) з урахуванням (19) набуде вигляду

$$\dot{\delta} = \gamma_T(\dot{s}_0 + \omega(f - f_r)) + (\gamma'_T s + \psi'_1 L) \frac{\dot{f}}{\gamma_T}, \quad (22)$$

де

$$s = (\dot{s}_0 - \omega f_r)(t - t_r) + \omega \int_{t_r}^t f(\tau) d\tau. \quad (23)$$

В результаті

$$\dot{f} = \frac{\gamma_T}{\gamma'_T s + \psi'_1 L} \left[\dot{\delta} - \gamma_T(\dot{s}_0 + \omega(f - f_r)) \right]. \quad (24)$$

Для випадку трилінійного двофазного матеріалу з однаковими модулями пружності отримаємо:

$$\dot{f} = \frac{\mu b}{L} \left[\dot{\delta} - b(\dot{s}_0 + \omega(f - f_r)) \right]. \quad (25)$$

Після інтегрування можна записати

$$f(t) = \alpha_* + (f_r - \alpha_*) e^{-(t-t_r)/\beta},$$

$$\beta = \frac{\mu b^2 \omega}{L}, \quad \alpha_* = (\dot{\delta} / b - \dot{s}_0 + f_r) / \omega, \quad (26)$$

$$t \in [t_r; \infty), f(t_r) = f_r, f(t_r) = f_r < f_M.$$

З метою спрощення запису введемо позначення

$$c_1 = b^2 + 2k(c + f_r), \quad F = f - f_r.$$

Перепишемо (23), (24) таким чином:

$$\dot{F} = \Phi(F, s), \quad s = \dot{s}_0(t - t_r) + \omega \int_{t_r}^t F(\tau) d\tau,$$

$$\Phi(F, s) = \frac{\gamma_T(F)}{ks + \frac{L}{\mu_1}} \left[\dot{\delta} - \gamma_T(F)(\dot{s}_0 + \omega F) \right], \quad (27)$$

$$\gamma_T(F) = \sqrt{c_1 + 2kF}.$$

На першій ділянці (до фазового переходу) $\dot{s} \equiv 0; s \equiv 0; t \in [0; t_r]$.

З формул (14) і (15) отримаємо:

$$\dot{\sigma} = \frac{\mu_1}{L} \dot{\delta} \Rightarrow \sigma = \frac{\mu_1}{L} \dot{\delta} \cdot t, \quad (28)$$

$$\dot{f}(\sigma) = (k\sigma + b)\dot{\sigma} = \left(\frac{k\mu_1 \dot{\delta}}{L} t + b \right) \frac{\mu_1}{L} \dot{\delta}.$$

Інтегруючи останню рівність, отримаємо:

$$f(t) = k \left(\frac{\mu_1 \dot{\delta}}{L} \right)^2 \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{b \mu_1 \dot{\delta}}{L} \cdot t, \quad (29)$$

$$t \in [0; t_r], f(0) = 0, f(t_r) = f_r < f_M.$$

На другій ділянці систему рівнянь (27) будемо розв'язувати наближено при наступних умовах:

$$s(t_r) = 0, F(t_r) = 0. \quad (30)$$

Для цього введемо сітку за часом і зробимо позначення:

$$t_p = t_{p-1} + \tau, p = 1; 2; 3; \dots, t_0 = t_r,$$

$$s^p = s(t_p), F^p = F(t_p), \quad (31)$$

$$\Phi^p = \Phi(F^p, s^p), \gamma_T^p = \gamma_T(F^p).$$

В результаті диференціальне рівняння та інтеграл (27) можна замінити еквівалентними різницеvim рівняннями і сумою. Звідси отримаємо розрахункові формули для рушійної сили F :

$$F^{p+1} = F^p + \tau \cdot \Phi(F^p, s^p),$$

$$s^p = p \cdot \dot{s}_0 \cdot \tau + \omega \cdot J^p, \quad (32)$$

$$J^p = J^{p-1} + \frac{\tau}{2} (F^{p-1} + F^p),$$

$$J^0 = 0, F^0 = 0.$$

При числовому розв'язанні системи (27) за допомогою наведених різницеvim формул спочатку задаються $L, \omega, \dot{s}_0, \dot{\delta}, \gamma_M, \sigma_M, \gamma_m, \sigma_m, \mu_1, \mu_3, \tau$. Потім обчислюються $k, k_0, k_1, b, \sigma_0, c, \mu_2$ і після цього $t_r, f_r, c_1, b, \sigma_0, \mu_2$.

Результати розрахунків наведено нижче. На рисунку 3, а показано типову залежність для швидкості розповсюдження фазового переходу від часу. Графік має три ділянки. На першій ділянці швидкість дорівнює нулю, а на третій – досягає постійного значення. Між ними міститься ділянка зі змінною швидкістю. В результаті обчислення дотичного модуля на кожному кроці інтегрування за часом для інтегральної діаграми матеріалу (рисунк 3, б) теж маємо три характерні ділянки.

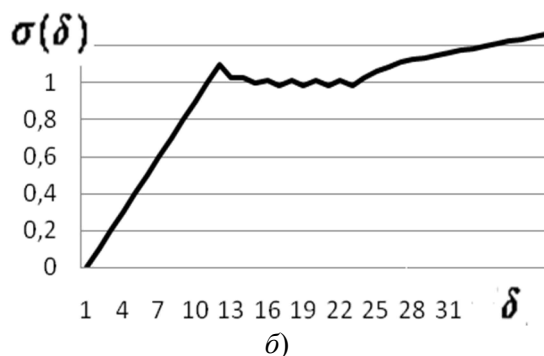
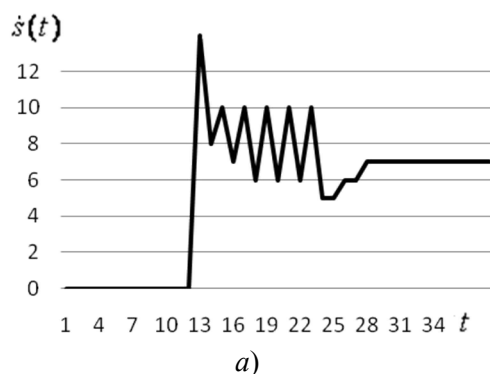


Рисунок 3 – Швидкість розповсюдження фазового переходу (а) та інтегральна діаграма матеріалу (б)

Висновки. Як встановлено в експериментальних дослідженнях, поведінка матеріалу в точці тіла в загальному випадку відрізняється від поведінки зразка в цілому. У роботі формулюється феноменологічна модель для опису властивостей матеріалу саме в точці при змінному в часі температурному полі. Для опису пружної деформації і деформації фазового перетворення використовувалася термомеханічна поверхня псевдопружного матеріалу, що складається з трьох прямолінійних ділянок. Таке трактування теорії призводить до нестійкої діаграми напруження-деформація і вимагає рішення граничної за-

дачі з урахуванням розвитку фронту деформації перетворення. Таке трактування дало можливість описати ряд експериментальних даних на різних зразках при різних умовах навантаження і температури. Встановлено, що класичні діаграми матеріалів являють собою криву, що огинає деяке сімейство діаграм матеріалу, побудоване для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій.

Перша ділянка відповідає пружній поведінці матеріалу. Третя – характеризує зміцнення матеріалу. Між ними міститься ділянка, яка нагадує поведінку ідеально пластичного матеріалу.

Список використаних джерел

- [1] R. Abeyaratne, J. K. Knowles, *Evolution of phase transitions*. Cambridge University Press, 2006.
- [2] A. Petrov, Yu. Chernyakov, P. Steblyanko, K. Domichev, and V. Haydurov, "Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity", *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, vol. 4/7 (94), pp. 25-33, 2018 (Scopus).
- [3] J. A. Shaw, and S. Kyriakides, "On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a NiTi alloy", *Acta Materialia*, no. 45, pp. 683-700, 1997.
- [4] P. Steblyanko, Yu. Chernyakov, A. Petrov, and V. Loboda, "Phenomenological model of pseudo-elastic-plastic material under non-stationary combining loading", *Structural Integrity*, vol. 8, Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, Springer Verlag, 2019, pp. 205-208.
- [5] О. Д. Петров, "Комп'ютерне моделювання поведінки стрижня з трилінійного двофазного матеріалу при розтягуванні", на *Міжнар. наук.-практ. конф. Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання: матеріали статей* (ISBN 978-617-7468-26-3), Івано-Франківськ, 2018, с. 234-237.
- [6] А. Д. Петров, К. Э. Демичев, П. А. Стеблянюк, и Ю. А. Черняков, "Экспериментальное обоснование варианта модели поведения материала с памятью формы и псевдоупругостью", *Моделювання та інформаційні технології: зб. наук. пр. Ін-ту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України*, № 80, с. 81-87, 2017.
- [7] П. Стеблянюк, А. Галишин, и А. Петров, "Описание термомеханической поверхности материала при помощи двумерного сплайна", на *Міжнар. наук. конф. Математичні проблеми технічної механіки*, (квіт. 14–17, 2015). Дніпродзержинськ, 2015, с. 126.
- [8] Yu. N. Shevchenko, P. A. Steblyanko, and A. D. Petrov, "Numerical methods in nonstationary problems of the theory of thermoplasticity", *Problems of computing mechanics and durability of designs: coll. of sci. works*, no. 22, Dnepropetrovsk, 2014, pp. 250-264.
- [9] K. Domichev, P. Steblyanko, and A. Petrov, "Phenomenological modeling of volume nanomaterials with form memory", *Innovative Solutions in Modern Science: sci. journ.*, Dubai, no. 4 (40), pp. 5-17, 2020.
- [10] К. Е. Дьомічев, П. О. Стеблянюк, та О. Д. Петров, "Моделювання поведінки тіла з псевдопружно-пластичного матеріалу при нестационарному навантаженні", на *II Міжнар. конф. Функціональні матеріали для інноваційної енергетики*, Київ, 2020, с. 54.
- [11] К. Е. Дьомічев, П. О. Стеблянюк, та О. Д. Петров, "Моделювання миттєвої термомеханічної поверхні трилінійного двофазного матеріалу при нестационарному навантаженні", на *Міжнар. наук.-практ. конф. Пріоритетні шляхи розвитку науки та освіти*, Львів, 2020, с. 61-63.
- [12] К. Е. Дьомічев, та О. Д. Петров, "Математичне моделювання псевдо-пружно-пластичних тіл з урахуванням нелінійності", на *XXXVIII Наук.-техн. конф. молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України*, Київ, 2020, с. 10-12.
- [13] K. Domichev, P. Steblyanko, and A. Petrov, "Mathematical modeling of structural elements from functionally heterogeneous materials" in *Міжнар. наук.-практ. конф. Science, research, development, technics and technology*, Krakow, 2020, pp. 27-29.
- [14] К. Е. Дьомічев, "Математичне та комп'ютерне моделювання нестационарного напружено-деформованого пружно-пластичного стану тіл під дією фізико-механічних полів", на *Міжнар. наук.-практ. конф. Актуальні питання сьогодення*, Вінниця, 2018, с. 82-85.
- [15] К. Е. Дьомічев, О. Д. Петров, та П. О. Стеблянюк, "Математичне моделювання поведінки тіл із функціональних структурно неоднорідних матеріалів під дією нестационарного навантаження", на *Міжнар. наук.-практ. конф. Новітні технології в освіті, науці та виробництві*, Покровськ: ДонНТУ, 2020, с. 211-213.

References

- [1] R. Abeyaratne, J. K. Knowles, *Evolution of phase transitions*. Cambridge University Press, 2006.

- [2] A. Petrov, Yu. Chernyakov, P. Steblyanko, K. Domichev, and V. Haydurov, "Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity", *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, vol. 4/7 (94), pp. 25-33, 2018 (Scopus).
- [3] J. A. Shaw, and S. Kyriakides, "On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a NiTi alloy", *Acta Materialia*, no. 45, pp. 683-700, 1997.
- [4] P. Steblyanko, Yu. Chernyakov, A. Petrov, and V. Loboda, "Phenomenological model of pseudo-elastic-plastic material under non-stationary combining loading", *Structural Integrity*, vol. 8, Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, Springer Verlag, 2019, pp. 205-208.
- [5] A. D. Petrov, "Computer simulation of the behavior of a rod made of three-phase two-phase tensile material", in *Int. Sci.-Pract. Conf. Information technologies and computer modeling*, (ISBN 978-617-7468-26-3), Ivano-Frankivsk, 2018, pp. 234-237. [in Ukrainian].
- [6] A. D. Petrov, K. E. Domichev, P. A. Steblyanko, and Yu. A. Chernyakov, "Experimental substantiation of a variant of the material behavior model with shape memory and pseudoelasticity", *Modeling and information technologies*: coll. of sci. works of Pukhov Institute of Modeling Problems in Energy, National Academy of Sciences of Ukraine, no. 80, pp. 81-87, 2017. [in Russian].
- [7] P. Steblyanko, A. Galishin, and A. Petrov, "Description of the thermomechanical surface of a material using a two-dimensional spline", in *Int. Sci. Conf. Mathematical problems of technical mechanics*, Dniprodzerzhynsk, 2015, p. 126. [in Russian].
- [8] Yu. N. Shevchenko, P. A. Steblyanko, and A. D. Petrov, "Numerical methods in nonstationary problems of the theory of thermoplasticity", *Problems of computing mechanics and durability of designs*: coll. of sci. works, no. 22, Dnepropetrovsk, 2014, pp. 250-264.
- [9] K. Domichev, P. Steblyanko, and A. Petrov, "Phenomenological modeling of volume nanomaterials with form memory", *Innovative Solutions in Modern Science*: sci. journ., Dubai, no. 4 (40), pp. 5-17, 2020.
- [10] K. E. Domichev, P. O. Steblyanko, and A. D. Petrov, "Modeling of body behavior from pseudoelastic-plastic material under non-stationary loading", in *II Int. Conf. Functional Materials for Innovative Energy*, Kyiv, 2020, p. 54. [in Ukrainian].
- [11] K. E. Domichev, P. O. Steblyanko, and A. D. Petrov, "Modeling of instantaneous thermomechanical surface of three-linear two-phase material under non-stationary loading", in *Int. Sci.-Pract. Conf. Priority ways of the development of science and education*, Lviv, 2020, pp. 61-63. [in Ukrainian].
- [12] K. E. Domichev, and A. D. Petrov, "Mathematical modeling of pseudo-elastic-plastic bodies taking into account nonlinearity", in *XXXVIII Sci.-Tech. Conf. of Young Scientists and Specialists of Pukhov Institute of Modeling Problems in Energy*, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020, pp. 10-12. [in Ukrainian].
- [13] K. Domichev, P. Steblyanko, and A. Petrov, "Mathematical modeling of structural elements from functionally heterogeneous materials" in *Міжнар. наук.-практ. конф. Science, research, development, technics and technology*, Krakow, 2020, pp. 27-29.
- [14] K. E. Domichev, "Mathematical and computer modeling of the nonstationary stress-strain elastic-plastic state of bodies under the action of physical and mechanical fields", in *Int. Sci.-Pract. Conf. Current issues of today*, Vinnytsia, 2018, pp. 82-85. [in Ukrainian].
- [15] K. E. Domichev, A. D. Petrov, and P. O. Steblyanko, "Mathematical modeling of the behavior of bodies from functional structurally inhomogeneous materials under the action of nonstationary loading", in *Int. Sci.-Pract. Conf. The latest technologies in education, science and industry*, Pokrovsk: DonNTU, 2020, pp. 211-213. [in Ukrainian].

P. O. Steblyanko, *Dr.Phys.-Math.Sc., professor*,
e-mail: caf-vmi@ukr.net

University of Customs and Finance
V. Vernadskoho St., 2/4, Dnipro, 49000, Ukraine

K. E. Domichev, *Ph.D., associate professor*,
e-mail: demichevk@gmail.com

Kyiv International University
Lvovskaya St., 49, Kyiv, 03115, Ukraine

A. D. Petrov, *Ph.D.*
e-mail: caf-vmi@ukr.net
Dnipro National University named after Oles Honchar
Gagarin Ave., 72, Dnipro, 49000, Ukraine

SIMULATION OF THE BEHAVIOR OF A ROD FROM THREE-LINEAR TWO-PHASE MATERIAL TAKING INTO ACCOUNT TEMPERATURE

In the conditions of modern scientific and technological progress in various fields of science and technology an increasing number of new materials find application. The growth of production of pseudo-elastic-plastic materials or materials with shape memory which have phase transitions and their wide application necessitate the creation of new mathematical and computer models and calculation methods taking into account real technological loads and material properties. To simulate the behavior of structural elements made of such materials it is necessary to determine the unsteady thermomechanical state not only at the pseudo-elastic stage of deformation, but also beyond the elastic limit at significant plastic deformations. In order to construct physical relations between the stress and strain, it is necessary to know the position of the phase transition front and the kinetic response function. Such a problem is relevant for mathematical and computer simulation of materials having phase transitions with regard to temperature.

The paper formulates a nonlinear phenomenological model for describing the properties of alloys with memory at the material point and during temperature changes. It has been established that classical material diagrams are a curve enveloping a certain family of material diagrams constructed according to certain laws of changes in the rate and discontinuity of the deformation front. In order to use the phenomenological model to investigate two-phase materials with different elastic moduli, an additional problem related to the development of the instantaneous thermomechanical surface is introduced. A numerical study has been carried out in the work, as a result of which a typical dependence for the phase transition propagation velocity in time has been obtained. The graph of the dependence of the phase transition propagation velocity on time has three sections. On the first section the speed is zero, and on the third it reaches a constant value. Between them there is a section with a variable velocity. As a result of calculating the tangential modulus at each time integration step, the integral material diagram constructed in the work also has three characteristic sections. The phenomenological model obtained in the paper can be used for mathematical and computer modeling of functional materials.

Keywords: *mathematical simulation, shape memory materials, phase transition, phenomenological model, intelligent materials.*