УДК 621.373.826.032:534.232.082.73

**О. Н. Петрищев**[1], *д.т.н., профессор*,
**К. В. Базило**[2], *к.т.н., доцент*
[1]Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»
просп. Победы, 37, Киев, 03056, Украина
[2]Черкасский государственный технологический университет
б-р Шевченко, 460, Черкассы, 18006, Украина

# РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИМПЕДАНСА ДИСКОВОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ТРАНСФОРМАТОРА С ЗАКОРОЧЕННЫМ СЕКТОРНЫМ ЭЛЕКТРОДОМ ВО ВТОРИЧНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

*Пьезоэлектрические диски с секторным электродированием поверхности являются практически основным элементом многих микроэлектромеханических систем. Однако в настоящее время отсутствуют надежные и достоверные методики построения математических моделей пьезоэлектрических устройств, которые могли бы использоваться в качестве теоретических основ расчета характеристик и параметров этого класса функциональных элементов современной пьезоэлектроники. В результате исследования математической модели реального устройства можно определить тот набор геометрических, физико-механических и электрических параметров реального объекта, который обеспечивает реализацию технических показателей функционального элемента пьезоэлектроники, оговоренных в техническом задании. Это существенно сокращает время и стоимость разработки новых функциональных элементов пьезоэлектроники.*

*Основной результат настоящей статьи заключается в том, что впервые построена теория неосесимметричных планарных колебаний тонкого пьезокерамического диска, которая опирается на адекватное описание физического состояния колеблющегося пьезоэлектрика.*

***Ключевые слова:*** *пьезоэлектрический трансформатор, физические процессы, математическая модель, секторные электроды.*

**Введение.** В работе [1] дана постановка задачи о расчете параметров напряженно-деформированного состояния тонкого пьезокерамического диска с разрезными электродами (рис. 1). Как показано в статье [1], определение разности потенциалов $U_2$ на электрической нагрузке $Z_2$ во вторичной цепи пьезоэлектрического трансформатора является, вообще говоря, далеко не тривиальной задачей. Для того, чтобы осознать особенности выполнения некоторых вычислительных процедур, которые описаны в постановочной статье [1], рассмотрим более простую как в смысле выполнения расчетов, так и в смысле планирования и постановки эксперимента ситуацию, когда секторный электрод во вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора накоротко замкнут на общую шину, т. е. когда электрическая нагрузка $Z_2 = 0$. В этом случае электрический потенциал $U(\varphi)$ на поверхности $z = \alpha$ (символом $\alpha$ обозначена толщина пьезокерамического диска) определяется очевидным образом:

$$U(\varphi) = \begin{cases} U_0 \; \forall \varphi \in [-\vartheta_0, \vartheta_0], \\ 0 \; \forall \varphi \notin [-\vartheta_0, \vartheta_0], \end{cases} \qquad (1)$$

что эквивалентно следующему разложению

$$U(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^{(m)} \cos m\varphi, \qquad (2)$$

где $\Phi^{(0)} = U_0 \vartheta_0 / \pi$;

$\Phi^{(m)} = 2U_0 \sin m\vartheta_0 / (m\pi) \forall m \geq 1$; $U_0$ – амплитудное значение электрического потенциала на секторном электроде 1 (рис. 1).

Зная разность потенциалов $U_1$ и $U_0$, можно легко определить электрический импеданс $Z_{эл}^{(1)}$ вырожденного пьезоэлектрического трансформатора по известному электрическому импедансу $Z_1$:

$$Z_{эл}^{(1)} = \frac{U_0 Z_1}{U_1 - U_0}. \qquad (3)$$

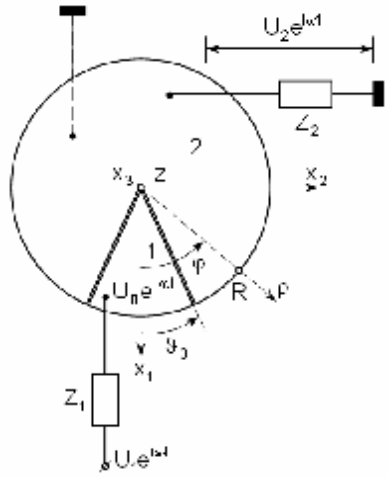


**Рис. 1. Расчетная схема объекта**

Разность потенциалов $U_0$ можно определить двумя путями – теоретически и экспериментально. И в том, и в другом случае знание разности потенциалов $U_0$ позволяет определить входной электрический импеданс $Z_{эл}^{(1)}$ пьезоэлектрического трансформатора.

Таким образом, основной ***целью*** настоящей статьи является определение разности электрических потенциалов $U_0$ по схеме вычислительных процедур, которая изложена в работе [1].

***1. Определение параметров напряженно-деформированного состояния пьезокерамического диска***

Отправной точкой в схеме построения математической модели дискового пьезоэлектрического трансформатора с секторными электродами является корректное решение дифференциальных уравнений установившихся гармонических колебаний:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}(\rho,\varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}(\rho,\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho}\left[\sigma_{\rho\rho}(\rho,\varphi) - \sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)\right] + \rho_0\omega^2 u_\rho(\rho,\varphi) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi\rho}(\rho,\varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{2}{\rho}\sigma_{\varphi\rho}(\rho,\varphi) + \rho_0\omega^2 u_\varphi(\rho,\varphi) = 0, \quad (5)$$

где механические напряжения $\sigma_{\rho\rho}(\rho,\varphi)$, $\sigma_{\rho\varphi}(\rho,\varphi) = \sigma_{\varphi\rho}(\rho,\varphi)$ и $\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)$ определены в работе [1] выражениями (37), (14) и (38) соответственно; $\rho_0$ – плотность пьезоэлектрической керамики; $\omega$ – круговая частота. Решения системы уравнений (4), (5), т. е. амплитудные значения компонентов вектора смещения материальных частиц $u_\rho(\rho,\varphi)$ и $u_\varphi(\rho,\varphi)$ должны обеспечить выполнение третьего закона Ньютона на боковой поверхности $\rho = R$, т. е. граничных условий следующего содержания:

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho,\varphi)\big|_{\rho=R} = \left[c_{11}^{*}\varepsilon_{\rho\rho}(\rho,\varphi) + c_{12}^{*}\varepsilon_{\varphi\kappa}(\rho,\varphi) + e_{31}^{*}U(\varphi)/\alpha\right]_{\rho=R} = 0, \quad (6)$$

$$\sigma_{\rho\varphi}(\rho,\varphi)\big|_{\rho=R} = 2c_{66}^{*}\varepsilon_{\rho\varphi}(\rho,\varphi)\big|_{\rho=R} = 0, \quad (7)$$

где $c_{11}^{*} = c_{11}^{E} - \left(c_{12}^{E}\right)^2/c_{33}^{E}$; $c_{12}^{*} = c_{12}^{E}\left(1 - c_{12}^{E}/c_{33}^{E}\right)$; $c_{66}^{E} = \left(c_{11}^{E} - c_{12}^{E}\right)/2 = \left(c_{11}^{*} - c_{12}^{*}\right)/2$ – модули упругости для режима планарных колебаний тонкого диска; $c_{\beta\lambda}^{E}$ – справочные значения модулей упругости поляризованной по толщине пьезокерамической пластинки; $e_{31}^{*} = e_{31} - e_{33}c_{12}^{E}/c_{33}^{E}$ – пьезоэлектрический модуль для режима планарных колебаний тонкого пьезокерамического диска; $e_{31}$ и $e_{33}$ – справочные значения пьезоэлектрических модулей. Компоненты тензора деформаций определяются через компоненты вектора смещения следующим образом [2]: $\varepsilon_{\rho\rho} = \partial u_\rho/\partial\rho$; $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \partial u_{\varphi\rho}/(\rho\partial\varphi) + u_\rho/\rho$; $\varepsilon_{\rho\varphi} = \left[\partial u_\rho/(\rho\partial\varphi) + \partial u_\varphi/\partial\rho - u_\varphi/\rho\right]/2$. В работе [1] показано, что нормальное напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)$ определяется следующим образом:

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi) = c_{12}^{*}\varepsilon_{\rho\rho}(\rho,\varphi) + c_{11}^{*}\varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi) + e_{13}^{*}U(\varphi)/\alpha. \quad (8)$$

Компоненты вектора смещения материальных частиц диска $u_\rho(\rho,\varphi)$ и $u_\varphi(\rho,\varphi)$ будем искать в следующем виде:

$$u_\rho(\rho,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}U_\rho^{(m)}(\rho)\cos m\varphi, \tag{9}$$

$$u_\kappa(\rho,\varphi)=-\sum_{m=0}^{\infty}U_\varphi^{(m)}(\rho)\sin m\varphi, \tag{10}$$

где $U_\varphi^{(0)}(\rho)\equiv 0$.

Подставляя определения (9) и (10) в формулы для расчета деформаций $\varepsilon_{\rho\rho}(\rho,\varphi)$, $\varepsilon_{\rho\varphi}(\rho,\varphi)$ и $\varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)$, а полученные результаты в соотношения (6) – (8), приходим к следующим расчетным формулам:

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{c_{11}^{*}\frac{\partial U_\rho^{(m)}(\rho)}{\partial\rho}+c_{12}^{*}\left[\frac{U_\rho^{(m)}(\rho)}{\rho}-\frac{mU_\varphi^{(m)}(\rho)}{\rho}\right]+\frac{e_{31}^{*}}{\alpha}\Phi^{(m)}\right\}\cos m\varphi, \tag{11}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{c_{12}^{*}\frac{\partial U_\rho^{(m)}(\rho)}{\partial\rho}+c_{11}^{*}\left[\frac{U_\rho^{(m)}(\rho)}{\rho}-\frac{mU_\varphi^{(m)}(\rho)}{\rho}\right]+\frac{e_{31}^{*}}{\alpha}\Phi^{(m)}\right\}\cos m\varphi, \tag{12}$$

$$\sigma_{\rho\varphi}(\rho,\varphi)=c_{66}^{E}\sum_{m=0}^{\infty}\left[-\frac{mU_\rho^{(m)}(\rho)}{\rho}-\frac{\partial U_\varphi^{(m)}(\rho)}{\partial\rho}+\frac{U_\varphi^{(m)}(\rho)}{\rho}\right]\sin m\varphi. \tag{13}$$

При вычислении производных попеременным $\rho$ и $\varphi$ от нормальных напряжений $\sigma_{\rho\rho}(\rho,\varphi)$ и $\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)$ необходимо помнить, что разложение (2) обеспечивает выполнение равенства (1). По этой причине $\partial U(\varphi)/\partial\rho=0$ и $\partial U(\varphi)/\partial\varphi=0$. Подставляя соотношения (11) – (13) в уравнения (4) и (5), получаем формулы для расчета сумм рядов со знакопеременными членами $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$. Суммы таких рядов равны нулю только лишь в том случае, когда коэффициенты при знакопеременных функциях $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ равны нулю. Последнее приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям следующего вида:

$$\rho^2\frac{\partial^2U_\rho^{(m)}(\rho)}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial U_\rho^{(m)}(\rho)}{\partial\rho}+\left[(\gamma\rho)^2-\nu_m^2\right]U_\rho^{(m)}(\rho)=-Q_\varphi^{(m)}(\rho), \tag{14}$$

$$\rho^2\frac{\partial^2U_\varphi^{(m)}(\rho)}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial U_\varphi^{(m)}(\rho)}{\partial\rho}+\left[(\lambda\rho)^2-\mu_m^2\right]U_\varphi^{(m)}(\rho)=-Q_\rho^{(m)}(\rho), \tag{15}$$

где $\gamma=\omega\sqrt{\rho_0/c_{11}^{*}}$ и $\lambda=\omega\sqrt{\rho_0/c_{66}^{E}}$ – волновые числа радиальных и окружных колебаний материальных частиц пьезоэлектрического диска; $\nu_m^2=1+(1-k)m^2/2$; $k=c_{12}^{*}/c_{11}^{*}$ – параметр пьезоэлектрика, причем, в отличие от коэффициента Пуассона, параметр $k<1$ и ограничения $k\le 0{,}5$ не существует; $\mu_m^2=1+c_{11}^{*}m^2/c_{66}^{E}=1+2m^2/(1-k)$, поскольку $c_{66}^{E}=(c_{11}^{E}-c_{12}^{E})/2=(c_{11}^{*}-c_{12}^{*})/2$. Правые части уравнений (14) и (15) определяются следующими выражениями:

$$Q_\varphi^{(m)}(\rho)=\frac{(3k-1)m}{2}\left[U_\varphi^{(m)}(\rho)-\frac{k+1}{3k-1}\rho\frac{\partial U_\varphi^{(m)}(\rho)}{\partial\rho}\right],$$

$$Q_\rho^{(m)}(\rho)=\frac{(3-k)m}{1-k}\left[U_\rho^{(m)}(\rho)+\frac{k+1}{3-k}\rho\frac{\partial U_\rho^{(m)}(\rho)}{\partial\rho}\right]. \tag{16}$$

Отчетливо видно, что при $m = 0$ уравнение (14) принимает вид хорошо известного [3] уравнения установившихся осесимметричных радиальных колебаний тонкого пьезоэлектрического диска.

Получить точное решение системы уравнений (14), (15) при произвольном значении $m \geq 1$ не представляется возможным.

Вместе с тем, применяя метод последовательных приближений, можно сколь угодно близко подойти к точному решению этой системы уравнений.

Представим точные решения системы уравнений (14), (15), т. е. функции $U_\rho^{(m)}(\rho)$ и $U_\varphi^{(m)}(\rho)$, в виде следующих разложений:

$$U_\rho^{(m)}(\rho) = U_\rho^{(m,0)}(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta U_\rho^{(m,n)}(\rho), \quad U_\varphi^{(m)}(\rho) = U_\varphi^{(m,0)}(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta U_\varphi^{(m,n)}(\rho), \; m \geq 1, \tag{17}$$

где $U_\rho^{(m,0)}(\rho)$ и $U_\varphi^{(m,0)}(\rho)$ – нулевые, т. е. самые грубые, приближения к точным решениям $U_\rho^{(m)}(\rho)$ и $U_\varphi^{(m)}(\rho)$; $\Delta U_\rho^{(m,n)}(\rho)$ и $\Delta U_\varphi^{(m,n)}(\rho)$ – поправки $n$-го порядка к $n-1$ приближению к точному решению $U_\rho^{(m)}(\rho)$ и $U_\varphi^{(m)}(\rho)$, т. е. $U_\rho^{(m,1)}(\rho) = U_\rho^{(m,0)}(\rho) + \Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho)$;

$$U_\rho^{(m,2)}(\rho) = U_\rho^{(m,1)}(\rho) + \Delta U_\rho^{(m,2)}(\rho) = U_\rho^{(m,0)}(\rho) + \Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho) + \Delta U_\rho^{(m,2)}(\rho)$$

и т. д. Полагая, что имеет место неравенство $\left|Q_\varphi^{(m)}(\rho)\right| < \left|Q_\rho^{(m)}(\rho)\right|$, нулевые приближения к точному решению системы уравнений (14), (15) будем искать как решения следующей системы уравнений:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U_\rho^{(m,0)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial U_\rho^{(m,0)}(\rho)}{\partial \rho} + \left[(\gamma\rho)^2 - \nu_m^2\right] U_\rho^{(m,0)}(\rho) = 0, \tag{18}$$

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U_\varphi^{(m,0)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial U_\varphi^{(m,0)}(\rho)}{\partial \rho} + \left[(\lambda\rho)^2 - \mu_m^2\right] U_\varphi^{(m,0)}(\rho) = -Q_\rho^{(m,0)}(\rho), \tag{19}$$

где

$$Q_\rho^{(m,0)}(\rho) = \frac{(3-k)m}{1-k}\left[U_\rho^{(m,0)}(\rho) + \frac{k+1}{3-k}\rho \frac{\partial U_\rho^{(m,0)}(\rho)}{\partial \rho}\right]. \tag{20}$$

Решение уравнения (18) очевидно:

$$U_\rho^{(m,0)}(\rho) = A_0^{(m)} J_{\nu_m}(\gamma\rho), \tag{21}$$

где $A_0^{(m)}$ – подлежащая определению константа; $\nu_m = \sqrt{1 + (1-k)m^2/2}$ – дробный порядок функции Бесселя. Подставляя решение (21) в определение (20), можем записать, что

$$Q_\rho^{(m,0)}(\rho) = A_0^{(m)} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma\rho), \tag{22}$$

где

$$F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma\rho) = \frac{(3-k)m}{1-k}\left\{J_{\nu_m}(\gamma\rho) + \left(\frac{k+1}{3-k}\right)\gamma\rho\left[J_{\nu_m - 1}(\gamma\rho) - \frac{\nu_m}{\gamma\rho} J_{\nu_m}(\gamma\rho)\right]\right\}.$$

Решение уравнения (19), следуя общеизвестной технологии решения неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений [4], будем искать в виде

$$U_\varphi^{(m,0)}(\rho) = \left[C_0^{(m)} + C_0^{(m)}(\rho)\right] J_{\mu_m}(\lambda\rho) + D_0^{(m)}(\rho) N_{\mu_m}(\lambda\rho), \tag{23}$$

где $C_0^{(m)}$ – подлежащая определению константа; $C_0^{(m)}(\rho)$ и $D_0^{(m)}(\rho)$ – варьируемые константы; $\mu_m = \sqrt{1 + 2m^2/(1-k)}$ – дробный порядок функции Бесселя $J_{\mu_m}(\lambda\rho)$ и функции Неймана $N_{\mu_m}(\lambda\rho)$.

Потребуем, чтобы варьируемые константы $C_0^{(m)}(\rho)$ и $D_0^{(m)}(\rho)$ обеспечивали минимальное количество вычислений, т. е. удовлетворяли условию

$$\frac{\partial C_0^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} J_{\mu_m}(\lambda\rho) + \frac{\partial D_0^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} N_{\mu_m}(\lambda\rho) = 0. \quad (24)$$

Вычислив (с учетом условия (24)) первую и вторую производную от предполагаемого решения (23) и подставив результаты вычислений вместе с выражением (23) в уравнение (19), получаем следующее равенство:

$$\rho^2\lambda \frac{\partial C_0^{(m)}(\rho)}{\partial \rho}\left[J_{\mu_m-1}(\lambda\rho) - \frac{\mu_m}{\lambda\rho} J_{\mu_m}(\lambda\rho)\right] + \rho^2\lambda \frac{\partial D_0^{(m)}(\rho)}{\partial \rho}\left[N_{\mu_m-1}(\lambda\rho) - \frac{\mu_m}{\lambda\rho} N_{\mu_m}(\lambda\rho)\right] = -Q_\rho^{(m,0)}(\rho). \quad (25)$$

Решение системы уравнений (24), (25) позволяет определить первые производные варьируемых констант $C_0^{(m)}(\rho)$ и $D_0^{(m)}(\rho)$ в следующем виде:

$$\frac{\partial C_0^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} = \frac{\pi}{2\rho} Q_\rho^{(m,0)}(\rho) N_{\mu_m}(\lambda\rho),$$

$$\frac{\partial D_0^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} = -\frac{\pi}{2\rho} Q_\rho^{(m,0)}(\rho) J_{\mu_m}(\lambda\rho). \quad (26)$$

Выполнив интегрирование в левых и правых частях соотношений (26), получаем

$$C_0^{(m)}(\rho) = \frac{\pi}{2}\int_0^\rho \frac{1}{x} Q_\rho^{(m,0)}(x) N_{\mu_m}(\lambda x)dx, \quad (27)$$

$$D_0^{(m)}(\rho) = -\frac{\pi}{2}\int_0^\rho \frac{1}{x} Q_\rho^{(m,0)}(x) J_{\mu_m}(\lambda x)dx. \quad (28)$$

Поскольку функция Неймана неограниченно возрастает при $x \to 0$ [5], постольку выражение (27) имеет особенность типа $1/0$. Для того, чтобы избавиться от этой бесконечности, дополним варьируемую константу $C_0^{(m)}(\rho)$ постоянной $\Pi_0^{(m)}$, которую определим следующим образом:

$$\Pi_0^{(m)} = \frac{\pi}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^R \frac{1}{x} Q_\rho^{(m,0)}(x) N_{\mu_m}(\lambda x)dx.$$

При этом, очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left[C_0^{(m)}(\rho) + \Pi_0^{(m)}\right] = \frac{\pi}{2\rho} Q_\rho^{(m,0)}(\rho) N_{\mu_m}(\lambda\rho),$$

откуда

$$C_0^{(m)}(\rho) = \frac{\pi}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_\varepsilon^\rho \frac{1}{x} Q_\rho^{(m,0)}(x) N_{\mu_m}(\lambda x)dx - \int_\varepsilon^R \frac{1}{x} Q_\rho^{(m,0)}(x) N_{\mu_m}(\lambda x)dx\right\} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_\rho^R \frac{1}{x} Q_\rho^{(m,0)}(x) N_{\mu_m}(\lambda x)dx. \quad (29)$$

Принимая во внимание соотношения (28) и (29), общее решение (23) можно записать в следующем виде:

$$U_\varphi^{(m,0)}(\rho) = C_0^{(m)} J_{\mu_m}(\lambda\rho) - \frac{\pi}{2} A_0^{(m)}\left[J_{\mu_m}(\lambda\rho)\int_\rho^R \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) N_{\mu_m}(\lambda x)dx + N_{\mu_m}(\lambda\rho)\int_0^\rho \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda x)dx\right]. \quad (30)$$

На боковой поверхности $\rho = R$ пьезоэлектрического диска, который совершает неосесимметричные планарные колебания и находится в пустоте, должны выполняться, как того требует третий закон Ньютона, следующие граничные условия:

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(m,0)}(\rho)\Big|_{\rho=R} = 0, \quad (31)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(m,0)}(\rho)\Big|_{\rho=R} = 0, \quad (32)$$

где

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(m,0)}(\rho) = c_{66}^E\left[-\frac{m}{\rho} U_\rho^{(m,0)}(\rho) - \frac{\partial U_\varphi^{(m,0)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{U_\varphi^{(m,0)}(\rho)}{\rho}\right],$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(m,0)}(\rho) = c_{11}^*\left\{\frac{\partial U_\rho^{(m,0)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{k}{\rho}\left[U_\rho^{(m,0)}(\rho) - m U_\varphi^{(m,0)}(\rho)\right] + \frac{e_{31}^*}{\alpha c_{11}^*}\Phi^{(m)}\right\}.$$

Подставляя нулевые приближения $U_{\rho}^{(m,0)}(\rho)$ и $U_{\varphi}^{(m,0)}(\rho)$, определенные выражениями (21) и (30) соответственно, в формулу для расчета составляющей касательного напряжения $\sigma_{\rho\varphi}^{(m,0)}(\rho)$, а полученный результат – в граничное условие (31), приходим к выводу, что

$$-A_0^{(m)}F_A^{(m,0)}(\gamma,\lambda,R)-C_0^{(m)}F_C^{(m,0)}(\lambda,R)=0, \quad (33)$$

где

$$F_A^{(m,0)}(\gamma,\lambda,R)=mJ_{\nu_m}(\gamma R)+\frac{\pi}{2}\left[\lambda R N_{\mu_m-1}(\lambda R)-(\mu_m-1)N_{\mu_m}(\lambda R)\right]\int_0^R\frac{1}{x}F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x)J_{\mu_m}(\lambda x)dx;$$

$$F_C^{(m,0)}(\lambda,R)=\lambda R J_{\mu_m-1}(\lambda R)-(\mu_m+1)J_{\mu_m}(\lambda R).$$

Из равенства (33) следует, что

$$C_0^{(m)}=-A_0^{(m)}\frac{F_A^{(m,0)}(\gamma,\lambda,R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda,R)},$$

после чего выражение (30) принимает следующий вид:

$$U_{\varphi}^{(m,0)}(\rho)=-A_0^{(m)}\left\{J_{\mu_m}(\lambda\rho)\left[\frac{F_A^{(m,0)}(\gamma,\lambda,R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda,R)}+\frac{\pi}{2}\int_{\rho}^{R}\frac{1}{x}F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x)N_{\mu_m}(\lambda x)dx\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{2}N_{\mu_m}(\lambda\rho)\int_0^{\rho}\frac{1}{x}F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x)J_{\mu_m}(\lambda x)dx\right\}. \quad (34)$$

Подставляя выражения (21) и (34) в формулу для расчета числовых значений составляющей нормального напряжения $\sigma_{\rho\rho}^{(m,0)}(\rho)$, получаем

$$\sigma_{\rho\rho}^{(m,0)}(\rho)\Big|_{\rho=R}=\frac{c_{11}^*}{R}\left[A_0^{(m)}\frac{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda,R)}+\frac{2e_{31}^*R}{\alpha c_{11}^*}\frac{\sin m\vartheta_0}{m\pi}U_0\right]=0, \quad (35)$$

где

$$\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)=F_C^{(m,0)}(\lambda,R)\left[\gamma R J_{\nu_m-1}(\gamma R)-(\nu_m-k)J_{\nu_m}(\gamma R)\right]+km\left[F_A^{(m,0)}(\gamma,\lambda,R)J_{\mu_m}(\lambda R)+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{2}N_{\mu_m}(\lambda R)F_C^{(m,0)}(\lambda,R)\int_0^R\frac{1}{x}F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x)J_{\mu_m}(\lambda x)dx\right]. \quad (36)$$

Из условия (35) находим константу $A_0^{(m)}$:

$$A_0^{(m)}=-\frac{U_0\beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)}F_C^{(m,0)}(\lambda,R), \quad (37)$$

где $\beta_m=2e_{31}^*R\sin m\vartheta_0/\left(\alpha c_{11}^* m\pi\right)$ – размерный (метр/вольт) весовой множитель.

Таким образом, нулевое приближение к точным решениям уравнений (14) и (15) записывается в следующем виде:

$$U_{\rho}^{(m,0)}(\rho)=-\frac{U_0\beta_m F_C^{(m,0)}(\lambda,R)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)}J_{\nu_m}(\gamma\rho), \quad (38)$$

$$U_{\varphi}^{(m,0)}(\rho)=\frac{U_0\beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)}F_{\mu_m}^{(0)}(\lambda\rho), \quad (39)$$

где

$$F_{\mu_m}^{(0)}(\lambda\rho)=J_{\mu_m}(\lambda\rho)\left[F_A^{(m,0)}(\gamma,\lambda,R)+\frac{\pi}{2}F_C^{(m,0)}(\lambda,R)\int_{\rho}^{R}\frac{1}{x}F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x)N_{\mu_m}(\lambda x)dx\right]+$$

$$+\frac{\pi}{2}N_{\mu_m}(\lambda\rho)F_C^{(m,0)}(\lambda,R)\int_0^{\rho}\frac{1}{x}F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x)J_{\mu_m}(\lambda x)dx.$$

Первое приближение к точному решению $U_\rho^{(m)}(\rho)$, т. е. функция $U_\rho^{(m,1)}(\rho)$, определяется как решение следующего уравнения:

$$\rho^2\frac{\partial^2 U_\rho^{(m,1)}(\rho)}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial U_\rho^{(m,1)}(\rho)}{\partial\rho}+\left[(\gamma\rho)^2-\nu_m^2\right]U_\rho^{(m,1)}(\rho)=-Q_\varphi^{(m,1)}(\rho), \tag{40}$$

где

$$Q_\varphi^{(m,1)}(\rho)=\frac{U_0\beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)}\Phi_{\mu_m}^{(0)}(\lambda\rho);$$

$$\Phi_{\mu_m}^{(0)}(\lambda\rho)=\frac{(3k-1)m}{2}\left[F_{\mu_m}^{(0)}(\lambda\rho)-\frac{k+1}{3k-1}\rho\frac{\partial F_{\mu_m}^{(0)}(\lambda\rho)}{\partial\rho}\right].$$

После подстановки в уравнение (40) определения первого приближения, т. е. представления $U_\rho^{(m,1)}(\rho)= U_\rho^{(m,0)}(\rho)+\Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho)$, получаем следующее уравнение:

$$\rho^2\frac{\partial^2\Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho)}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial\Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho)}{\partial\rho}+\left[(\gamma\rho)^2-\nu_m^2\right]\Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho)=-\frac{U_0\beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)}\Phi_{\mu_m}^{(0)}(\lambda\rho). \tag{41}$$

Несложно показать, что решение уравнения (41) имеет следующий вид:

$$\Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho)=A_1^{(m)}J_{\nu_m}(\gamma\rho)-\frac{U_0\beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)}W_\rho^{(m,1)}(\gamma\rho), \tag{42}$$

где

$$W_\rho^{(m,1)}(\gamma\rho)=\frac{\pi}{2}\left[J_{\nu_m}(\gamma\rho)\int_\rho^R\frac{1}{x}\Phi_{\mu_m}^{(0)}(\lambda x)N_{\nu_m}(\gamma x)dx+N_{\nu_m}(\gamma\rho)\int_0^\rho\frac{1}{x}\Phi_{\mu_m}^{(0)}(\lambda x)J_{\nu_m}(\gamma x)dx\right].$$

Поправка $\Delta U_\varphi^{(m,1)}(\rho)$ к нулевому приближению $U_\varphi^{(m,1)}(\rho)$ определяется из уравнения

$$\rho^2\frac{\partial^2\Delta U_\varphi^{(m,1)}(\rho)}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial\Delta U_\varphi^{(m,1)}(\rho)}{\partial\rho}+\left[(\lambda\rho)^2-\mu_m^2\right]\Delta U_\varphi^{(m,1)}(\rho)=-\Delta Q_\rho^{(m,1)}(\rho), \tag{43}$$

где

$$\Delta Q_\rho^{(m,1)}(\rho)=A_1^{(m)}F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma\rho)-\frac{U_0\beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)}\Xi_\rho^{(m,1)}(\gamma\rho);$$

$$\Xi_\rho^{(m,1)}(\gamma\rho)=\frac{(3-k)m}{1-k}\left[W_\rho^{(m,1)}(\gamma\rho)+\frac{k+1}{3-k}\rho\frac{\partial W_\rho^{(m,1)}(\gamma\rho)}{\partial\rho}\right].$$

Решение уравнения (43) записывается в следующем виде:

$$\Delta U_\varphi^{(m,1)}(\rho)=C_1^{(m)}J_{\mu_m}(\lambda\rho)-\frac{\pi}{2}A_1^{(m)}\left[J_{\mu_m}(\lambda\rho)\int_\rho^R\frac{1}{x}F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x)N_{\mu_m}(\lambda\rho)dx+\right.$$

$$\left.+N_{\mu_m}(\lambda\rho)\int_0^\rho\frac{1}{x}F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x)J_{\mu_m}(\lambda\rho)dx\right]+\frac{\pi U_0\beta_m}{2\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)}\left[J_{\mu_m}(\gamma\rho)\int_\rho^R\frac{1}{x}\Xi_\rho^{(m,1)}(\gamma x)N_{\mu_m}(\lambda\rho)dx+\right.$$

$$\left.+N_{\mu_m}(\gamma\rho)\int_0^\rho\frac{1}{x}\Xi_\rho^{(m,1)}(\gamma x)J_{\mu_m}(\lambda\rho)dx\right]. \tag{44}$$

Граничное условие (31) принимает вид

$$\Delta\sigma_{\rho\varphi}^{(m,1)}(\rho)\Big|_{\rho=R} = 0, \tag{45}$$

где

$$\Delta\sigma_{\rho\varphi}^{(m,1)}(\rho) = c_{66}^{E}\left[-\frac{m}{\rho}\Delta U_{\rho}^{(m,1)}(\rho) - \frac{\partial\Delta U_{\varphi}^{(m,1)}(\rho)}{\partial\rho} + \frac{\Delta U_{\varphi}^{(m,1)}(\rho)}{\rho}\right].$$

Подставляя в определение поправки $\Delta\sigma_{\rho\varphi}^{(m,1)}(\rho)$ выражения (42) и (44), а полученный результат – в условие (45), получаем следующее уравнение:

$$-A_1^{(m)}F_A^{(m,0)}(\gamma,\lambda,R) - C_1^{(m)}F_C^{(m,0)}(\lambda,R) + \frac{U_0\beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)}W_{\rho\varphi}^{(m,1)}(\gamma,\lambda,R) = 0, \tag{46}$$

где

$$W_{\rho\varphi}^{(m,1)}(\gamma,\lambda,R) = \frac{\pi}{2}\left\{mN_{\nu_m}(\gamma R)\int_0^R\frac{1}{x}\Phi_{\mu_m}(\lambda x)J_{\nu_m}(\gamma x)dx - \right.$$

$$\left. - \left[\lambda R N_{\mu_m-1}(\gamma R) - (\mu_m - 1)N_{\mu_m}(\gamma R)\right]\int_0^R\frac{1}{x}\Xi_{\rho}^{(m,1)}(\gamma x)J_{\mu_m}(\lambda x)dx\right\}.$$

Из уравнения (46) следует, что

$$C_1^{(m)} = -A_1^{(m)}\frac{F_A^{(m,0)}(\gamma,\lambda,R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda,R)} + \frac{U_0\beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)}\frac{W_{\rho\varphi}^{(m,1)}(\gamma,\lambda,R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda,R)}. \tag{47}$$

Граничное условие (32) после подстановки в него определений первых приближений $U_{\rho}^{(m,1)}(\rho) = U_{\rho}^{(m,0)}(\rho) + \Delta U_{\rho}^{(m,1)}(\rho)$ и $U_{\varphi}^{(m,1)}(\rho) = U_{\varphi}^{(m,0)}(\rho) + \Delta U_{\varphi}^{(m,1)}(\rho)$ к точным решениям уравнений (14) и (15) принимает следующий вид:

$$\Delta\sigma_{\rho\rho}^{(m,1)}(\rho)\Big|_{\rho=R} = 0, \tag{48}$$

где

$$\Delta\sigma_{\rho\rho}^{(m,1)}(\rho) = c_{11}^{*}\left\{\frac{\partial\Delta U_{\rho}^{(m,1)}(\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\left[\Delta U_{\rho}^{(m,1)}(\rho) - m\Delta U_{\varphi}^{(m,1)}(\rho)\right]\right\}; \tag{49}$$

слагаемое $e_{31}^{*}\Phi^{(m)}/(\alpha c_{11}^{*})$ в формуле (49) отсутствует, потому что оно сформировало амплитудный множитель $A_0^{(m)}$ в нулевом приближении.

Подставляя выражения (42) и (44) в определение (49), а полученный результат – в граничное условие (48), получаем, с учетом соотношения (47), следующий результат:

$$A_1^{(m)}\frac{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda,R)} - \frac{U_0\beta_m F_A^{(m,1)}(\gamma,\lambda,R)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)F_C^{(m,0)}(\lambda,R)} = 0, \tag{50}$$

где

$$F_A^{(m,1)}(\gamma,\lambda,R) = kmJ_{\mu_m}(\lambda R)W_{\rho\varphi}^{(m,1)}(\gamma,\lambda,R) + F_C^{(m,0)}(\lambda,R)\times$$

$$\times\left\{R\left[\frac{\partial W_{\rho}^{(m,1)}(\gamma\rho)}{\partial\rho} - \frac{k}{\rho}W_{\rho}^{(m,1)}(\gamma\rho)\right]\Bigg|_{\rho=R} + \frac{\pi}{2}kmN_{\mu_m}(\lambda R)\int_0^R\frac{1}{x}\Xi_{\rho}^{(m,1)}(\gamma x)J_{\mu_m}(\lambda x)dx\right\}.$$

Из уравнения (50) определяется константа $A_1^{(m)}$:

$$A_1^{(m)} = \frac{U_0\beta_m}{\left[\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)\right]^2}F_A^{(m,1)}(\gamma,\lambda,R). \tag{51}$$

Выражение (51) завершает процедуру построения первых приближений $U_{\rho}^{(m,1)}(\rho)$ и $U_{\varphi}^{(m,1)}(\rho)$ к точным решениям уравнений (14) и (15). Все последующие приближения строятся по схеме, которая была реализована при построении первого приближения. Принимая это во внимание, можно записать общие выражения для амплитудных множителей $A_n^{(m)}$ и $C_n^{(m)}$ $n$-го приближения в следующем виде:

$$A_n^{(m)} = \frac{U_0\beta_m}{\left[\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)\right]^{n+1}} F_A^{(m,n)}(\gamma,\lambda,R),$$

$$C_n^{(m)} = -A_n^{(m)}\frac{F_A^{(m,0)}(\gamma,\lambda,R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda,R)} + \frac{U_0\beta_m}{\left[\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)\right]^{n}}\frac{W_{\rho\varphi}^{(m,n)}(\gamma,\lambda,R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda,R)}.$$

Как следует из соотношений (47) и (51), первые приближения доопределяют амплитуды радиальных и окружных смещений. Частотные свойства планарных колебаний, т. е. набор резонансных частот, определяются сразу, на первом шаге, при вычислении нулевого приближения, и остаются неизменными при любом последующем приближении к точным значениям компонентов вектора смещения материальных частиц тонкого пьезокерамического диска.

Совершенно очевидно, что корни уравнения

$$\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R) = 0 \qquad (52)$$

доставляют числовые значения резонансных частот $\Omega_p^{(m)}$ ($p = 1,2,3,...$; $m = 1,2,3,...$; $\Omega = \gamma R$ – безразмерная частота) планарных неосесимметричных колебаний тонкого пьезокерамического диска. При $m = 0$ выражение (36) для расчета числовых значений функции $\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)$ принимает следующий вид:

$$\Psi_0^{(0)}(\gamma,\lambda,R) = F_C^{(0,0)}(\lambda,R)F_A^{(0,0)}(\gamma,R),$$

где $F_c^{(0,0)}(\lambda,R) = \lambda R J_0(\lambda R) - 2J_1(\lambda R)$;

$F_A^{(0,0)}(\gamma,R) = \gamma R J_0(\gamma R) - (1-k)J_1(\gamma R)$.

Уравнение $\Psi_0^{(0)}(\gamma,\lambda,R) = 0$ допускает две реализации, а именно $F_c^{(0,0)}(\lambda,R) = 0$ (при этом $F_A^{(0,0)}(\lambda,R) \neq 0$) или $F_A^{(0,0)}(\lambda,R) = 0$ (при этом $F_C^{(0,0)}(\lambda,R) \neq 0$). Первая ситуация соответствует осесимметричным крутильным колебаниям тонкого пьезокерамического диска. Вторая ситуация соответствует хорошо изученным [6] осесимметричным радиальным колебаниям. Одновременное выполнение условий $F_c^{(0,0)}(\lambda,R) = 0$ и $F_A^{(0,0)}(\lambda,R) = 0$ невозможно по физическим соображениям.

Рассмотрим ситуацию, когда выполняется условие $F_A^{(0,0)}(\lambda,R) = 0$. При этом $F_C^{(0,0)}(\lambda,R) \neq 0$ и окружной компонент $U_{\varphi}^{(0)}(\rho) = 0$, т. е. в тонком пьезокерамическом диске существуют осесимметричные радиальные колебания материальных частиц. Числовые значения первых шести резонансных частот, т. е. первых шести корней уравнения $F_A^{(0,0)}(\lambda,R) = 0$, представлены в табл. 1.

Таблица 1

**Числовые значения резонансных частот осесимметричных радиальных колебаний тонкого пьезокерамического диска ($m = 0$)**

| k | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,30 | 2,048850 | 5,389364 | 8,571859 | 11,731787 | 14,883847 | 18,032222 |
| 0,35 | 2,079508 | 5,398928 | 8,577761 | 11,736076 | 14,887220 | 18,035003 |
| 0,40 | 2,109198 | 5,408461 | 8,583657 | 11,740362 | 14,890591 | 18,037782 |
| 0,45 | 2,137971 | 5,417963 | 8,589546 | 11,744646 | 14,893961 | 18,040561 |
| 0,50 | 2,165871 | 5,427433 | 8,595426 | 11,748926 | 14,897330 | 18,043339 |
| 0,55 | 2,192942 | 5,436869 | 8,601299 | 11,753203 | 14,900696 | 18,046116 |
| 0,60 | 2,219221 | 5,446270 | 8,607163 | 11,757477 | 14,904062 | 18,048892 |

**Примечание:** $x_n = \gamma_n R = 2\pi f_n R \Big/ \sqrt{c_{11}^*/\rho_0}$; $n = 1,2,...,6$.

Следует особо подчеркнуть, что числовые значения корней уравнения $F_A^{(0,0)}(\lambda,R) = 0$ определялись в предположении, что потери на вязкое трение в объеме пьезокерамики равны

нулю. Вместе с тем, из результатов экспериментальных исследований [6] следует, что потери энергии упругих колебаний в пьезокерамиках типа ЦТС достаточно велики. Усредненное в диапазоне частот $0 \le \Omega \le 20$ значение добротности пьезокерамики $Q_п \le 80$. При конечном значении добротности $Q_п$ волновые числа $\gamma$ и $\lambda$ становятся комплекснозначными величинами, причем $\gamma = \gamma_0(1 - i/(2Q_п))$ и $\lambda = \lambda_0(1 - i/(2Q_п))$, где $\gamma_0 = \omega/\sqrt{c_{11}^*/\rho_0}$ и $\lambda_0 = \omega/\sqrt{c_{66}^E/\rho_0}$ – определенные без учета потерь энергии в материале пьезокерамики волновые числа радиальных и окружных колебаний материальных частиц тонкого диска.

На рис. 2 приведены графики модуля функции $F_A^{(0,0)}(\gamma,R)$, рассчитанные без учета потерь энергии, т. е. при $Q_п \to \infty$ (пунктирная кривая), и для добротностей $Q_п = 40;80$. Из показанных на рис. 2 построений следует, что в реальном эксперименте возможно надежно зарегистрировать первые две резонансные частоты. Третий резонанс определяется с трудом, но все-таки определяется. Четвертый и последующие за ним резонансы в реальном эксперименте на больших пьезокерамических дисках практически не видны. Таким образом, последующее определение корней уравнения (52) будем осуществлять в диапазоне безразмерных частот $0 \le \Omega \le 10$. Для диска из пьезокерамики типа ЦТС с модулем упругости $c_{11}^* = 76{,}1$ ГПа и плотностью $\rho_0 = 7430$ кг/м$^3$ значение безразмерной частоты $\Omega = 10$ при радиусе $R = 33 \cdot 10^{-3}$ м соответствует циклической частоте $f = 154$ кГц.

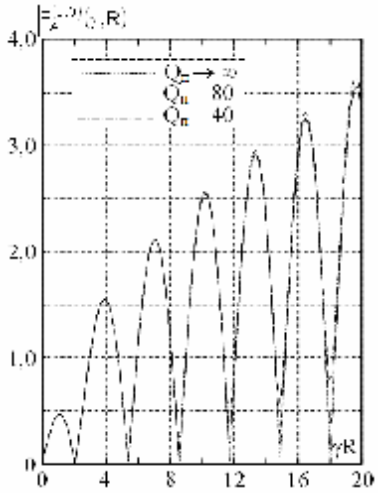


**Рис. 2. Частотно зависимое изменение модуля функции $F_A^{(0,0)}(\gamma,R)$ при различных значениях потерь энергии в объеме пьезокерамики**

На рис. 3*а* показано частотно зависимое изменение интегрального слагаемого

$$W_{\nu_m}^{(\mu_m)}(\gamma,\lambda,R) = \int_0^R \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda x) dx$$

в формуле (36) для расчета числовых значений функции $\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)$. На рис. 3*б* показаны графики произведения интеграла на функцию Неймана $N\mu_m(\lambda R)$, которая, как известно, обращается в бесконечность при стремлении своего аргумента к нулю. Значения интеграла $W_{\nu_m}^{(\mu_m)}(\gamma,\lambda,R)$ определялись, естественно, численно.

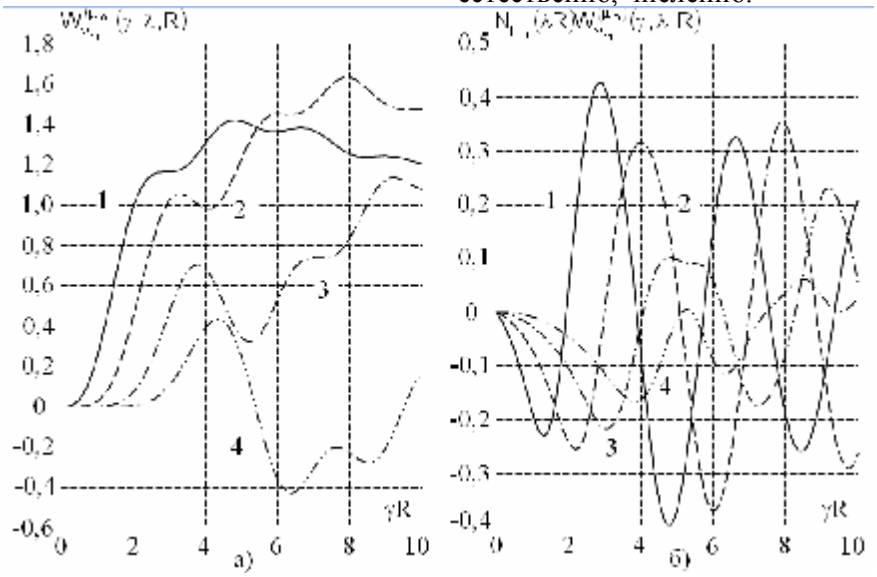


**Рис. 3. Частотно зависимое изменение интегрального слагаемого в формуле для расчета числовых значений функции $\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)$**

Цифрами в поле рисунков обозначены значения параметра $m$. Параметр $k = 0,35$. При построении графиков, показанных на рис. 3, потери энергии в объеме пьезокерамики не учитывались. При вычислениях, которые были выполнены для реального материала с добротностью $Q_п = 80$, было установлено, что мнимая часть интеграла меньше действительной более чем на два порядка. Это позволяет утверждать, что результаты расчетов, при выполнении которых учитываются потери в пьезокерамике, отличаются от результатов, которые получены без учета потерь, на доли процента. Основная цель расчетов, результаты которых графически представлены на рис. 3, заключается в том, чтобы показать, что функция $\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)$ сохраняет конечные значения, т. е. не теряет аналитичности, во всех точках частотного диапазона $0 \le \Omega \le 10$.

В табл. 2 представлены результаты вычисления корней уравнения (52) для пьезокерамики с бесконечной добротностью для параметра $m = 1$. Прочерки в седьмой и восьмой колонках означают, что $(x_7, x_8) > 10$. Прочерки в первой и второй колонках означают, что действительные значения корней уравнения $\Psi_0^{(1)}(\gamma,\lambda,R) = 0$ отсутствуют. Числовые значения корней уравнения $\Psi_0^{(1)}(\gamma,\lambda,R) = 0$ размещены по колонкам табл. 2 в соответствии с принципом: монотонному изменению числовых значений параметра $k$ соответствует монотонное изменение действительных значений корней уравнения.

Таблица 2

**Корни уравнения** $\Psi_0^{(1)}(\gamma,\lambda,R) = 0$

| k | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,30 | - | - | 3,911623 | 5,539152 |
| 0,35 | - | - | 3,829236 | 5,437504 |
| 0,40 | - | - | 3,744709 | 5,306088 |
| 0,45 | - | - | 3,657736 | 5,151679 |
| 0,50 | 2,227320 | 2,641923 | 3,567747 | 4,979361 |
| 0,55 | 2,119035 | 2,710795 | 3,473761 | 4,791539 |
| 0,60 | 2,038388 | 2,717757 | 3,374220 | 4,588571 |

| k | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,30 | 5,948812 | 7,676985 | 8,756947 | 9,563390 |
| 0,35 | 5,850308 | 7,438342 | 8,768293 | 9,224752 |
| 0,40 | 5,759540 | 7,189047 | - | - |
| 0,45 | 5,669546 | 6,926937 | - | - |
| 0,50 | 5,576048 | 6,648404 | 8,469996 | 8,777221 |
| 0,55 | 5,479674 | 6,346246 | 8,039970 | 8,856692 |
| 0,60 | 5,392088 | 6,000142 | 7,645511 | 9,127612 |

В табл. 3 приведены действительные значения корней уравнения $\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R) = 0$ для фиксированных значений параметра $m = 2;3;4$. Можно отметить, что с ростом значений параметра $m$ возрастают начальные числовые значения первого действительного корня частотного уравнения $\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R) = 0$. Помимо этого, уменьшается количество действительных корней в частотном диапазоне $0 \le \Omega \le 10$. Если для $m = 1$ при $k < 0,40$ в диапазоне безразмерных частот $0 \le \Omega \le 10$ существует шесть действительных корней, то при $m = 2$ их уже пять, при $m = 3$ - два, и для $m = 4$ остается всего один действительный корень. Говоря иными словами, спектр собственных чисел граничной задачи (14), (15), (31), (32) монотонно перемещается в область более высоких безразмерных частот $\Omega = \gamma R$ при увеличении номера $m$ окружной гармоники планарных колебаний тонкого пьезокерамического диска.

Таблица 3

**Числовые значения корней уравнения** $\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)=0$

| m = 2 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| k | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| 0,30 | 5,224122 | 6,316289 | 7,181977 | 8,888322 | 9,426647 | - |
| 0,35 | 5,147395 | 6,283961 | 7,042483 | 8,669918 | 9,308233 | - |
| 0,40 | 5,063123 | 6,224496 | 6,899122 | 8,436622 | 9,188273 | - |
| 0,45 | 4,971017 | 6,137198 | 6,750816 | 8,189068 | 9,078037 | 9,872740 |
| 0,50 | 4,870746 | 6,023171 | 6,595927 | 7,926521 | 9,032471 | 9,425329 |
| 0,55 | 4,761809 | 5,884059 | 6,432273 | 7,647168 | - | - |
| 0,60 | 4,643407 | 5,721184 | 6,257216 | 7,348024 | - | - |

| m = 3 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| k | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| 0,30 | - | - | 8,437364 | - | - | - |
| 0,35 | - | - | 8,278501 | 9,842421 | - | - |
| 0,40 | - | - | 8,110490 | 9,658245 | - | - |
| 0,45 | 6,358329 | 6,612469 | 7,932131 | 9,449698 | 9,932386 | - |
| 0,50 | 6,155154 | 6,619131 | 7,741788 | 9,219171 | 9,751691 | - |
| 0,55 | 5,960942 | 6,571897 | 7,537102 | 8,968205 | 9,588124 | - |
| 0,60 | 5,752409 | 6,489583 | 7,314335 | 8,697224 | 9,481170 | - |

| m = 4 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| k | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| 0,30 | - | - | - | - | 9,638074 | - |
| 0,35 | - | - | - | - | 9,450503 | - |
| 0,40 | - | - | 7,155191 | 7,426474 | 9,248442 | - |
| 0,45 | - | - | 6,969645 | 7,410500 | 9,031968 | - |
| 0,50 | - | - | 6,809497 | 7,354129 | 8,799033 | - |
| 0,55 | - | - | 6,659742 | 7,269690 | 8,554081 | - |
| 0,60 | 4,559561 | 5,131281 | 6,514170 | 7,160959 | 8,299302 | - |

В завершение обсуждения результатов решения уравнения (52) необходимо подчеркнуть, что данные табл. 2 и 3 справедливы для весьма специфической ситуации, когда на одном из двух секторных электродов постоянно поддерживается нулевой электрический потенциал.

Определим электрический импеданс $Z_{эл}^{(1)}$.

***2. Расчет электрического импеданса пьезокерамического диска под секторным электродом***

Поскольку нулевое приближение к точным значениям компонентов вектора смещения материальных частиц диска сразу обеспечивает точное определение резонансных частот, расчет электрического импеданса $Z_{эл}^{(1)}$ будем выполнять в предположении, что напряженно-деформированное состояние диска определяется нулевым приближением, т. е.

$$u_\rho(\rho,\varphi)=-U_0\frac{e_{31}^*}{\alpha c_{11}^*}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin m\vartheta_0}{m\pi}\frac{F_C^{(m,0)}(\lambda,R)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)}J_{\nu_m}(\gamma\rho)\cos m\varphi,$$

$$u_\varphi(\rho,\varphi)=-U_0\frac{e_{31}^*}{\alpha c_{11}^*}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin m\vartheta_0}{m\pi}\frac{F_{\mu_m}^{(0)}(\lambda\rho)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)}\sin m\varphi. \qquad (53)$$

Следуя методике, которая изложена в работе [1], определяем аксиальный компонент $D_z^{(1)}(\rho,\varphi)$ вектора электрической индукции под секторным электродом № 1

$$D_z^{(1)}(\rho,\varphi) = e_{31}^*\left[\varepsilon_{\rho\rho}(\rho,\varphi) + \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)\right] - \frac{\chi_{33}^*}{\alpha}U_0 =$$

$$= e_{31}^*\left\{\frac{\partial u_\rho(\rho,\varphi)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial u_\varphi(\rho,\varphi)}{\partial\varphi} + u_\rho(\rho,\varphi)\right]\right\} - \frac{\chi_{33}^*}{\alpha}U_0 =$$

$$= -\frac{\chi_{33}^*}{\alpha}U_0\left[2K_{31}^2\gamma R\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin m\vartheta_0}{m\pi}W_z^{(m,0)}(\gamma,\lambda,\rho)\cos m\varphi + 1\right], \quad (54)$$

где $\chi_{33}^* = \chi_{33}^\varepsilon + e_{33}^2/c_{33}^E$ – диэлектрическая проницаемость пьезокерамики в режиме планарных колебаний тонкого диска; $\chi_{33}^\varepsilon$ – справочное значение диэлектрической проницаемости, которое определяется для режима постоянства (равенства нулю) упругих деформаций; $K_{31}^2 = \left(e_{31}^*\right)^2/\left(\chi_{33}^* c_{11}^*\right)$ – квадрат коэффициента электромеханической связи для режима планарных колебаний диска из поляризованной по толщине пьезокерамики; $W_z^{(m,0)}(\gamma,\lambda,\rho)$ – нулевое приближение к точному значению линейного инварианта тензора деформаций (объемная деформация) в режиме планарных колебаний. Числовые значения функции $W_z^{(m,0)}(\gamma,\lambda,\rho)$ рассчитываются по формуле

$$W_z^{(m,0)}(\gamma,\lambda,\rho) = F_C^{(m,0)}(\lambda,R)\left[J_{\nu_m-1}(\gamma\rho) - \frac{\nu_m - 1}{\gamma\rho}J_{\nu_m}(\gamma\rho)\right] + \frac{m}{\gamma\rho}F_{\mu_m}^{(0)}(\lambda\rho). \quad (55)$$

Амплитудное значение полного электрического заряда $Q^{(1)}$ на секторном электроде № 1 определяется следующим образом:

$$Q^{(1)} = \int_{2\pi-\vartheta_0}^{\vartheta_0}\int_0^R \rho D_z^{(1)}(\rho,\varphi)\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= -C_1^* U_0\left[\frac{4K_{31}^2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin^2 m\vartheta_0}{m^2\vartheta_0}\frac{\Psi_z^{(m,0)}(\gamma,\lambda,R)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)} + 1\right], \quad (56)$$

где $C_1^* = \chi_{33}^* R^2\vartheta_0/\alpha$ – динамическая электрическая емкость секторного электрода № 1; символом $\Psi_z^{(m,0)}(\gamma,\lambda,R)$ обозначена следующая безразмерная аналитическая конструкция:

$$\Psi_z^{(m,0)}(\gamma,\lambda,R) = \frac{1}{\gamma R}\int_0^{\gamma R}\gamma\rho\, W_z^{(m,0)}(\gamma,\lambda,\rho)\,d(\gamma\rho). \quad (57)$$

Амплитуда электрического тока $I^{(1)}$, который протекает в проводнике, соединяющем источник электрических сигналов и секторный электрод № 1 (рис. 1), определена в работе [1] следующим образом: $I^{(1)} = -i\omega Q^{(1)}$. Поскольку $Z_{эл}^{(1)} = U_0/I^{(1)}$, постольку, после очевидных действий, получаем выражение для расчета входного электрического импеданса

$$Z_{эл}^{(1)} = \frac{1}{i\omega C_1^*\Psi^{(0)}(\gamma,\lambda,R)}, \quad (58)$$

где

$$\Psi^{(0)}(\gamma,\lambda,R) = \frac{4K_{31}^2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin^2 m\vartheta_0}{m^2\vartheta_0}\frac{\Psi_z^{(m,0)}(\gamma,\lambda,R)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R)} + 1.$$

Функция $\Psi^{(0)}(\gamma,\lambda,R)$ является нулевым приближением к точному значению функции $\Psi(\gamma,\lambda,R)$, которая определяет частотно зависимое изменение входного электрического импеданса $Z_{эл}^{(1)}$ вырожденного пьезоэлектрического трансформатора. Когда $\Psi^{(0)}(\gamma,\lambda,R)\to\infty$, а это наблюдается тогда, когда $\Psi_0^{(m)}(\gamma,\lambda,R) = 0$, электрический импеданс $Z_{эл}^{(1)}\to 0$, что соответствует физическому состоянию электромеханической системы, которое называется электромеханическим резонансом. В ближайшей окрестности частоты электромеханического резонанса функция $\Psi^{(0)}(\gamma,\lambda,R) = 0$ и $Z_{эл}^{(1)}\to\infty$, что соответствует электромеханическому антирезонансу.

На рис. 4*а-г* показаны результаты расчетов по формуле (58) модуля электрического

импеданса $Z_{эл}^{(1)}$ для различных значений углового размера $\vartheta_0$ секторного электрода. Числовые значения $\vartheta_0$ в дуговых градусах указаны в поле рисунков. Расчеты были выполнены для пьезокерамики типа ЦТС со следующими значениями физико-механических параметров: $c_{33}^E = 108{,}6$ ГПа; $c_{11}^E = 94{,}8$ ГПа; $c_{12}^E = 44$ ГПа; $\chi_{33}^{\varepsilon} = 7{,}0227 \cdot 10^{-9}$ Ф/м; $e_{33} = 13{,}17$ Кл/м$^2$; $e_{31} = -5{,}89$ Кл/м$^2$; $\rho_0 = 7428$ кг/м$^3$. Размеры пьезокерамического диска: радиус $R = 33 \cdot 10^{-3}$ м, толщина $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$ м. Расчет выполнялся для двух значений добротности $Q_p$ пьезокерамики – 80 единиц (сплошные кривые) и 160 единиц (штриховые кривые). Параметр пьезокерамики $k = c_{12}^* / c_{11}^* = 0{,}34$. По осям ординат откладываются значения модуля $Z_{эл}^{(1)}$ в килоомах, по осям абсцисс – значения циклической частоты $f$ в килогерцах. Счет электрического импеданса начинался с частоты $f = 5$ кГц. При выполнении вычислений суммировались первые три окружных гармоники, т. е. выражения со значениями индекса $m = 0, 1$ и $2$. Отчетливо видно, что с увеличением углового размера $\vartheta_0$ секторного электрода в диапазоне частот $(5 \div 100)$ кГц проявляются электромеханические резонансы, которые обусловлены нулевой окружной гармоникой (резонансы 1 и 4 на рис. 4*в*), первой окружной гармоникой (резонансы 2 и 5) и второй гармоникой (резонансы 3 и 6). Это позволяет выполнить экспериментальную проверку теоретических результатов, которые были изложены выше.

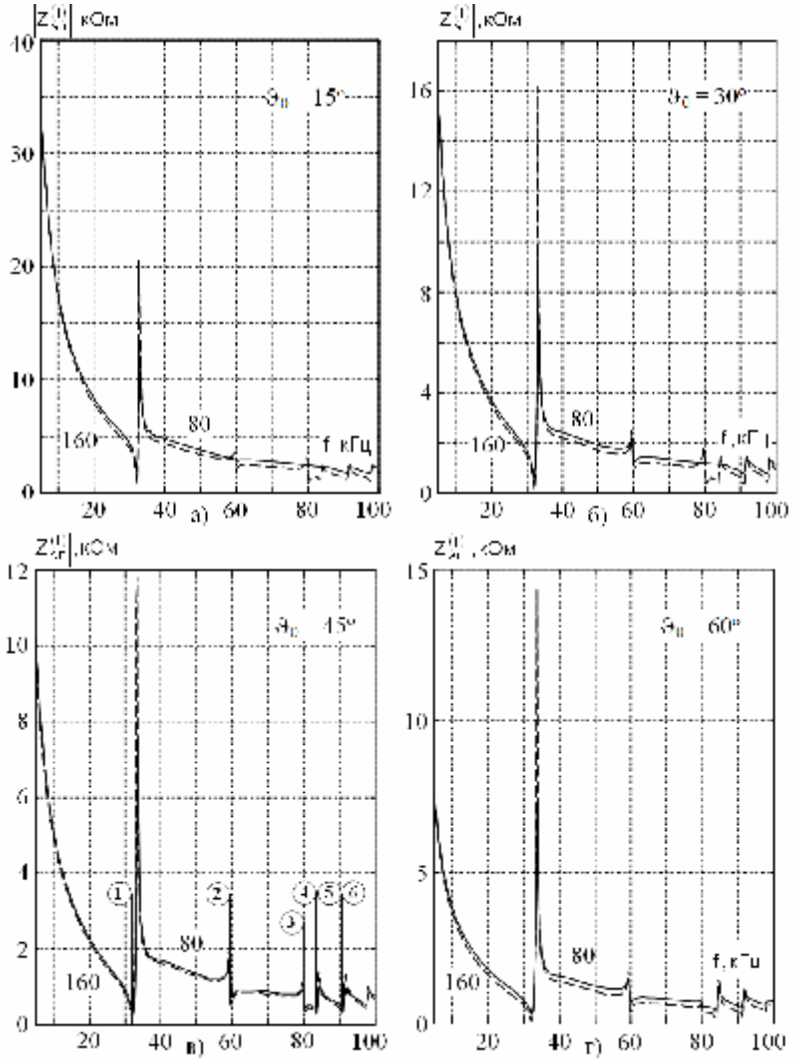


**Рис. 4. Модуль электрического импеданса $Z_{эл}^{(1)}$ части пьезокерамического диска под секторным электродом 1**

**Выводы.** Основной результат настоящей статьи заключается в том, что впервые построена теория неосесимметричных планарных колебаний тонкого пьезокерамического диска, которая опирается на адекватное описание физического состояния колеблющегося пьезоэлектрика.

### Список литературы


1. Петрищев О. Н., Базило К. В. Принципы и методы построения математических моделей дисковых пьезоэлектрических трансформаторов с секторными электродами. *Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: Технічні науки.* 2017. № 2. С. 33–44.
2. Петрищев О. Н. Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса. Киев: Аверс, 2012. 300 с.
3. Петрищев О. Н., Базило К. В. Принципы и методы расчета передаточных характеристик дисковых пьезоэлектрических трансформаторов. Часть 2. Методика расчета параметров и характеристик простейшего дискового пьезоэлектрического трансформатора. *Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: Технічні науки.* 2015. № 4. С. 10–23.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2008. 848 с.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. Москва: Наука, 1979. 832 с.
6. Петрищев О. Н., Базило К. В. Определение электрического импеданса пьезокерамического диска и его расчет в области средних и высоких частот. *Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: Технічні науки.* 2016. № 3. С. 36–49.


### References


1. Petrishchev, O. N. and Bazilo, C. V. (2017) Principles and methods of constructing mathematical models of disk piezoelectric transformers with sector electrodes. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu. Seria: Tehnichni nauky*, No. 2, pp. 33–44 [in Russian].
2. Petrishchev, O. N. (2012). Harmonic oscillations of piezoceramic elements. Part 1. Harmonic oscillations of piezoceramic elements in vacuum and resonance-antiresonance method. Kyiv: Avers, 300 p. [in Russian].
3. Petrishchev, O. N. and Bazilo, C. V. (2015) Calculation principles and methods of the transfer characteristics of disk piezoelectric transformers. Part 2. Method of parameters and characteristics calculation of the simplest disk piezoelectric transformer. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu. Seria: Tehnichni nauky*, No. 4, pp. 10–23 [in Russian].
4. Smirnov V. I. (2008) Course of higher mathematics. Vol. 2. St. Petersburg: BXV-Peterburg, 848 p. [in Russian]
5. Handbook on special functions with formulas, diagrams and mathematical tables (1979). In: M. Abramowitz and I. Stigun (eds). Moscow: Nauka, 832 p. [in Russian].
6. Petrishchev, O. N. and Bazilo, C. V. (2016) Calculation of electrical impedance of piezoceramic disk and its calculation in the range of medium and high frequencies. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu. Seria: Tehnichni nauky*, No. 3, pp. 36–49 [in Russian].

**O. N. Petrishchev**[1], *Dr.Tech.Sc.*, *professor*,
**C. V. Bazilo**[2], *Ph.D. (Eng.)*, *associated professor*
[1]National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"
Peremogy ave., 37, Kyiv, 03056, Ukraine
[2]Cherkasy State Technological University
Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine

# CALCULATION OF ELECTRICAL IMPEDANCE OF DISK PIEZOCERAMIC TRANSFORMER WITH A SHORTED SECTOR ELECTRODE IN SECONDARY ELECTRICAL CIRCUIT

*Piezoelectric disks with partial covering by electrodes of one or two surfaces are often used to create various functional piezoelectronic devices. Disks with sector covering by electrodes are almost the main element of many microelectromechanical systems. Currently, there are no reliable and valid methods of constructing of mathematical models of piezoelectric transformers, which could be used as a theoretical basis for characteristics and parameters calculating of this class of functional elements of modern piezoelectronics. As a result of research of mathematical model of a real device, a set of geometrical, physical, mechanical and electrical parameters of a real object that provides implementation of technical indicators of functional element of piezoelectronics specified in technical task can be determined. This significantly reduces time and cost of the development of new functional elements of piezoelectronics. The cost of the saved resources is the commercial price of mathematical model.*

*The purpose of this article is to determine the difference of electrical potentials according to the scheme of computational procedures of disk piezoceramic transformers with cut electrodes.*

*The main result of this article is that for the first time a theory of non-axisymmetric planar oscillations of a thin piezoceramic disk, which is based on adequate description of physical state of oscillating piezoelectric materials, is constructed.*

***Keywords:*** *piezoelectric transformer, physical processes, mathematical model, sector electrodes.*

*Статтю представляє О. М. Петріщев, д.т.н., професор.*